Définition 1

On appelle **norme** *sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

(i). *axiome de séparation :* $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E$

(ii). *homogénéité :* $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

(iii). *inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in E, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Proposition 2 (*Inégalité triangulaire inversée*)

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace normé. Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Définition 3

Un vecteur x d'un espace normé E est dit **unitaire** *si $\|x\| = 1$.*

Définition 4

Une **distance** *sur E (ou sur un ensemble quelconque) est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

(i). *symétrie :* $\forall x, y \in E, \quad d(x,y) = d(y,x)$

(ii). *séparation :* $\forall x, y \in E, \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

(iii). *inégalité triangulaire :* $\forall x, y, z \in E, \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Proposition 5

Si $(E, \|\,.\,\|)$ est un espace normé, l'application

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array}$$

définit une distance sur E.

Définition 6

Soient E un espace normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit :

- la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par $B(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$,
- la **boule fermée** de centre a et de rayon r par $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$,
- la **sphère** de centre a et de rayon r par $S(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.

Proposition 7

Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie **convexe***, c'est-à-dire que*

$$\forall x, y \in B, \quad \forall \theta \in [0;1], \quad (1-\theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère (de rayon $r > 0$) n'est pas convexe.

Définition 8

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite **bornée** *s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Si A est une partie bornée non vide de E, on définit son **diamètre** *par :*

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in A\}.$$

Proposition 9 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Pour tous $x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x,y) est liée.

Pour $x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k|.$$

Proposition 10

Les applications $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ (norme euclidienne) et $\|\,.\,\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition 11

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme.

Définition 12

Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont dites **équivalentes** *si*

$$\exists C_1, C_2 > 0, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Théorème 13 (*Équivalence des normes en dimension finie (admis)*)

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les normes sont deux à deux équivalentes.

Définition 14

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **bornée** *s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 15

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **convergente** *s'il existe $\ell \in E$ tel que $\|u_n - l\| \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de la suite $(u_n)_n$ et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 16

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *alors* $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$. *Par conséquent, toute suite convergente est bornée.*

Proposition 17

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments de* E *convergeant respectivement vers* ℓ *et* ℓ'. *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, *on a*

$$\lambda u_n + \mu v_n \longrightarrow \lambda\ell + \mu\ell \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de E *est un espace vectoriel, et l'application* $(u_n)_n \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *est linéaire.*

Proposition 18

Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *une suite numérique convergeant vers* λ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E *convergeant vers* $\ell \in E$, *alors*

$$\lambda_n \cdot u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell.$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$u(n) = u_1(n)e_1 + \cdots + u_p(n)e_p.$$

Les suites scalaires $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées (ou composantes) de la suite vectorielle u dans la base e.

Proposition 19

On a équivalence entre :

(i). *la suite* u *converge,*

(ii). *les suites coordonnées* $u_1, \dots, u_p$ *convergent.*

De plus, si tel est le cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_1(n))e_1 + \cdots + (\lim\limits_{n\to+\infty} u_p(n))e_p$.

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés, et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. On peut munir E de la norme produit suivante : pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ (avec $x_i \in E_i$)

$$N(x) = \max\{N_k(x_k) \mid k \in [\![1;p]\!]\}.$$

Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u(n) = (u_1(n), \dots, u_p(n))$. Les suites vectorielles $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées de la suite u.

Proposition 20

On a équivalence entre :

(i). *la suite* $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (pour* N*)*

(ii). *les suites coordonnées (ou composantes)* $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent (respectivement pour* N_k*).*

Si tel est le cas, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} u(n) = (\lim_{n\to+\infty} u_1(n), \dots, \lim_{n\to+\infty} u_p(n)).$$

Définition 21

On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Cette série est notée $\sum u_n$ et le terme S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

Définition 22

On dit que la série $\sum u_n$ **converge** *si la suite $(S_n)_n$ converge. Sa limite S est alors appelée somme de la série et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On appelle reste de rang n la quantité $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$.*

Définition 23

Une série $\sum u_n$ d'éléments de E est dite **absolument convergente** *si la série numérique à termes positifs $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

Théorème 24

Si E est de dimension finie, l'absolue convergence d'une série d'éléments de E entraîne sa convergence.

Définition 25

On appelle **voisinage** *d'un élément $x \in E$ toute partie $V \subset E$ vérifiant :*

$$\exists r > 0, \quad B(x,r) \subset V.$$

Définition 26

Une partie $\mathcal{U}$ de E est dite **ouverte** *si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.

Proposition 27

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 28

Une intersection **finie** *d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 29

Si $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ sont des ouverts des espaces normés $E_1, \dots, E_p$ alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_p$ est un ouvert de l'espace normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$.

Définition 30

Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** *à une partie $X \subset E$ si X est un voisinage de a, i.e.*

$$\exists r > 0, \quad B(a,r) \subset X.$$

L'intérieur de X, noté X°, est l'ensemble de tous les points intérieurs à X, c'est-à-dire $X^\circ = \{x \in E \mid$

$\exists r > 0,\ B(x,r) \subset X\}$.

Proposition 31

Une partie $X \subset E$ est ouverte si et seulement si $X^\circ = X$.

Proposition 32

Soit X une partie de E, alors X° est la réunion des ouverts inclus dans X. Par conséquent, X° est le plus grand ouvert inclus dans X.

Définition 33

Une partie F de E est dite ***fermée*** *si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E.*

Proposition 34

Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E.

Proposition 35

Une union ***finie*** *de fermés de E est un fermé de E.*

Proposition 36 (*Caractérisation séquentielle des fermés*)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ appartient à F, ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in F.$$