Définition 1

*Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou de $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour une suite réelle ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour une suite complexe. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$) la suite de terme général u_n.*

Définition 2

*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

*On note cette série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Pour $n \geq n_0$, le termeS_n est appelé la **somme partielle** de rang n de cette série.*

Définition 3

*La série numérique de terme général u_n est **convergente** lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge, c'est-à-dire lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = S.$$

*Cette limite S est appelée la **somme** de la série et est notée :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S.$$

En cas de convergence, on note pour tout $n \geq n_0$:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

*le **reste** d'ordre n de la série.*

Définition 4

*Une série non convergente est dite **divergente**. La **nature** d'une série est sa convergence ou sa divergence.*

Proposition 5

Si la série $\sum u_n$ converge, la suite des restes $(R_n)_n$ converge vers 0.

Proposition 6

*Une **série téléscopique** est une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1} - u_n$ pour une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

Proposition 7 (***Condition nécessaire de convergence d'une série***)

Si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition 8

Si la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0*, alors on dit que la série de terme général* u_n ***diverge grossièrement****.*

Proposition 9 (***Opérations sur les séries***)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries numériques convergentes. Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*, la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ *converge.*

Corollaire 10

Si $\sum u_n$ *est une série numérique convergente et* $\sum v_n$ *une série numérique divergente, alors la série* $\sum (u_n + v_n)$ *est une série divergente.*

Théorème 11 (***Convergence des séries à termes positifs***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs. Alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée, c'est-à-dire si et seulement si il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$*.*

De plus, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors :* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)$.

Corollaire 12 (***Comparaison de séries à termes positifs***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels positifs tels que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

(*i*) *Si la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*

(*ii*) *Si la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *diverge.*

Remarque : Le résultat est encore vrai si on a seulement l'inégalité $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0.

Corollaire 13

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de réels positifs. On suppose que* $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$ *(ceci est vrai en particulier si* $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$*), alors :*

(*i*) *si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge,*

(*ii*) *si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Corollaire 14 (*Nature de deux séries équivalentes*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ ont même nature.

Proposition 15 (*Règle de d'Alembert*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à termes ***strictement positifs****. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*

(i) Si $\ell > 1$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

(ii) Si $\ell < 1$, alors la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

(iii) Si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire.

Remarque : La règle de d'Alembert est encore vraie si on a seulement $u_n > 0$ à partir d'un certain rang n_0.

Théorème 16 (*Comparaison série-intégrale*)

Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, décroissante, à valeurs positives. Alors la série numérique $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Proposition 17 (*Séries géométriques*)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$.

Théorème 18 (*Séries de Riemann*)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série numérique à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 19 (*Série définissant l'exponentielle*)

La série numérique $\sum \dfrac{a^n}{n!}$ converge pour tout réel $a \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 20 (*Critère de Cauchy pour les séries*)

La série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Définition 21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument** *(ou est absolu-*

ment convergente) si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 22 (*Série absolument convergente*)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique absolument convergente. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et de plus :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Définition 23

Une série convergente mais non absolument convergente est dite ***semi-convergente****.*

Définition 24

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***alternée*** *si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n |u_n| \qquad \text{ou} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^{n+1}|u_n|.$$

(En d'autres termes, on demande que $(-1)^n u_n$ soit de signe constant, ce qui s'écrit encore $u_{n+1}u_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

Une série réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est ***alternée*** *si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est.*

——————- La suite n'est pas au programme de la semaine ——————————-

Théorème 25 (*Critère des séries alternées*)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

De plus, la somme de la série est encadrée par les sommes partielles consécutives.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et vérifie :

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Corollaire 26

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère des séries alternées. Le signe de la somme est celui de son premier terme.

Proposition 27 (*Règle d'Abel*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, que la série $\sum |v_n - v_{n+1}|$ converge, et que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$

est bornée, c'est-à-dire

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M,$$

alors la série $\sum u_n v_n$ *converge.*

Corollaire 28

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe telle que*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M,$$

et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* ***réelle, décroissante****, qui converge vers* 0*, alors la série* $\sum u_n v_n$ *converge.*

Théorème 29 (*Sommation des relations de comparaison*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* ***réelle à termes positifs****.*

1. *On suppose que la série* $\sum v_n$ ***diverge****.*
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
2. *On suppose que la série* $\sum v_n$ ***converge****.*
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Démonstration : On commence par le cas où la série $\sum v_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Puisque la série $\sum v_n$ est une série à termes positifs divergente, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ en croissant.

- Supposons que $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$. Alors il existe $M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n| \leq M v_n$ pour $n \geq N$. Pour tout $n > N$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
|U_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k\right| \\
&\leq |U_N| + \sum_{k=N+1}^{n} |u_k| \\
&\leq |U_N| + \sum_{k=N+1}^{n} Mv_k \\
&\leq |U_N| + MV_n
\end{aligned}$$

puisque la suite $(v_n)_n$ est à valeurs positives. Puisque la suite $(MV_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et $|U_N| \geq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > N$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $MV_n \geq |U_N|$. par suite, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|U_n| \leq 2MV_n$$

ce qui démontre que $U_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(V_n)$.

- Supposons désormais que $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$, alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \geq N$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > N$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon v_n$, pour tout $n \geq n_0$. Soit $n \geq n_0$, alors

$$\begin{aligned}
|U_n| &\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0} u_k\right| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \\
&\leq |U_{n_0}| + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \\
&\leq |U_{n_0}| + \varepsilon V_n
\end{aligned}$$

puisque la suite $(v_n)_n$ est positive. Puisque la suite $(\varepsilon V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et $|U_{n_0}| \geq 0$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\varepsilon V_n \geq |U_{n_0}|$. Pour tout $n \geq n_1$, on a donc finalement

$$|U_n| \leq 2\varepsilon V_n$$

ce qui achève de démontrer que $U_n = \underset{n\to+\infty}{o}(V_n)$.

On suppose désormais que la série $\sum v_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on a déjà dans les deux cas le fait que la série $\sum u_n$ converge absolument. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\widehat{U_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et} \quad \widehat{V_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

les restes étudiés.

- Si $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$, alors il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq Mv_n$. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. En passant par une somme tronquée jusqu'à $N > n$, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{N} |u_k| \leq M \sum_{k=n+1}^{N} v_k \leq M\widehat{V_n}$$

ce qui implique en faisant tendre N vers $+\infty$: $\left|\widehat{U_n}\right| \leq M\widehat{V_n}$ ce qui démontre le résultat voulu.

- Si $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$, on se donne $\varepsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Il suffit alors de remplacer M par ε dans la démonstration précédente, pour $n \geq n_0$. ■

Corollaire 30 (*Sommation des équivalents*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles* **à valeurs positives** *telles que* $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

- *Si l'une des deux séries diverge, l'autre diverge aussi et on a l'équivalent :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

- *Si l'une des deux séries converge, l'autre converge aussi et on a l'équivalent :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Définition 31

Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques. On appelle* **produit de Cauchy** *des séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *la série de terme général* w_n *défini par*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k.$$

Théorème 32 (*Produit de Cauchy*)

Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent absolument, alors la série produit de Cauchy* $\sum w_n$ *converge aussi absolument et on a l'égalité :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$