Définition 1

*Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou de $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour une suite réelle ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour une suite complexe. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$) la suite de terme général u_n.*

Définition 2

*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

*On note cette série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Pour $n \geq n_0$, le terme S_n est appelé la **somme partielle** de rang n de cette série.*

Définition 3

*La série numérique de terme général u_n est **convergente** lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge, c'est-à-dire lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = S.$$

*Cette limite S est appelée la **somme** de la série et est notée :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S.$$

En cas de convergence, on note pour tout $n \geq n_0$:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

*le **reste** d'ordre n de la série.*

Définition 4

*Une série non convergente est dite **divergente**. La **nature** d'une série est sa convergence ou sa divergence.*

Proposition 5

Si la série $\sum u_n$ converge, la suite des restes $(R_n)_n$ converge vers 0.

Proposition 6

*Une **série téléscopique** est une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1} - u_n$ pour une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

Proposition 7 (***Condition nécessaire de convergence d'une série***)

Si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition 8

Si la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0, *alors on dit que la série de terme général* u_n ***diverge grossièrement****.*

Proposition 9 (***Opérations sur les séries***)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries numériques convergentes. Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ *converge. De plus, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Corollaire 10

Si $\sum u_n$ *est une série numérique convergente et* $\sum v_n$ *une série numérique divergente, alors la série* $\sum(u_n + v_n)$ *est une série divergente.*

Théorème 11 (***Convergence des séries à termes positifs***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs. Alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée, c'est-à-dire si et seulement si il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$.

De plus, si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors :* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$.

Corollaire 12 (***Comparaison de séries à termes positifs***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels positifs tels que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

(i) *Si la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*

(ii) *Si la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge, alors la série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *diverge.*

Corollaire 13

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de réels positifs. On suppose que* $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$ *(ceci est vrai en particulier si* $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$*), alors :*

(i) *si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge,* *(ii) si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Corollaire 14 (*Nature de deux séries équivalentes*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels positifs tels que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$*. Alors les séries* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *ont même nature.*

Proposition 15 (*Règle de d'Alembert*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique à termes* **strictement positifs***. On suppose* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

(i) Si $\ell > 1$*, alors la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge grossièrement.*

(ii) Si $\ell < 1$*, alors la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*

(iii) Si $\ell = 1$*, alors on ne peut rien dire.*

Remarque : les extensions des théorèmes ci-dessus au cas où la positivité (respectivement stricte positivité) n'est valable qu'à partir d'un certain rang ont été à chaque fois vues en remarques.

Théorème 16 (*Comparaison série-intégrale*)

Soient $p \in \mathbb{N}$ *et* $f : [p; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ *une fonction continue, décroissante, à valeurs positives. Alors la série numérique* $\sum f(n)$ *et l'intégrale généralisée* $\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature.*