

**Définition 1**

On appelle **série entière** définie par la suite de coefficients complexes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la série des fonctions  $u_n : z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$ . Par abus de notation, cette série de fonctions  $\sum u_n$  est notée  $\sum a_n z^n$ .

L'ensemble  $\mathcal{D}$  des  $z \in \mathbb{C}$  pour lesquels la série numérique  $\sum a_n z^n$  converge est appelé **domaine de convergence** de la série entière et la fonction  $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est appelée somme de cette série entière.

**Lemme 2 (Lemme d'Abel)**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que la suite  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série numérique  $\sum a_n z^n$  converge absolument.

**Définition 3**

On appelle **rayon de convergence** de la série entière  $\sum a_n z^n$  le nombre :

$$R = \sup \{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

avec la convention : si  $A \subset \mathbb{R}$  est une partie de  $\mathbb{R}$  (non vide) non majorée,  $\sup A = +\infty$ .

**Proposition 4**

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  vaut

$$R = \sup \{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \}.$$

**Proposition 5**

Soient  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  et  $z \in \mathbb{C}$ .

(i) Si  $|z| < R$ , alors la série numérique  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  converge absolument.

(ii) Si  $|z| > R$ , alors la série numérique  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  diverge grossièrement ; plus précisément, la suite  $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée.

**Corollaire 6**

Soit  $D$  le domaine de convergence d'une série entière de rayon de convergence  $R$ .

- Si  $R = 0$ , alors  $D = \{0\}$ .
- Si  $R = +\infty$ , alors  $D = \mathbb{C}$ .
- Si  $R \in ]0; +\infty[$ , alors  $D(0, R) \subset D \subset \overline{D(0, R)}$ , où l'on a noté  $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  le disque ouvert de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

Il n'y a pas de résultat général sur la convergence des séries entières sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ .

**Définition 7**

Le disque  $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$  est appelé **disque ouvert de convergence** de la série entière

$$\sum a_n z^n.$$

**Proposition 8 (Règle de d'Alembert pour les séries entières)**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes, **non nuls** à partir d'un certain rang  $n_0$ . Si la suite  $\left( \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \geq n_0}$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , alors le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  vaut  $R = \frac{1}{\ell}$  avec les conventions  $\frac{1}{+\infty} = 0$  et  $\frac{1}{0} = +\infty$ .

**Proposition 9 (Règle de Cauchy)**

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. Si la suite  $\left( |a_n|^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , alors le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  est  $R = \frac{1}{\ell}$  (avec les conventions  $\frac{1}{+\infty} = 0$  et  $\frac{1}{0} = +\infty$ ).

**Définition 10**

On appelle **somme** des séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  la série entière  $\sum (a_n + b_n) z^n$ .

**Théorème 11 (Somme de deux séries entières)**

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ . Alors le rayon de convergence  $R$  de la série entière somme  $\sum (a_n + b_n) z^n$  vérifie

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

**Proposition 12**

Si les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  ont des rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$  vérifiant  $R_a \neq R_b$ , alors le rayon de convergence de la série entière somme  $\sum (a_n + b_n) z^n$  est égal à  $\min(R_a, R_b)$ .

**Définition 13**

On appelle **produit des séries entières**  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  la série entière  $\sum c_n z^n$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

**Théorème 14 (Produit de deux séries entières)**

Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a$  et  $R_b$ . Alors

le rayon de convergence  $R$  de la série entière produit  $\sum c_n z^n$  vérifie

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < \min(R_a, R_b)$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

### Définition 15

On appelle *série entière dérivée* de la série entière  $\sum a_n z^n$  la série entière  $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ .

### Proposition 16

Une série entière  $\sum a_n z^n$  et sa série entière dérivée  $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$  ont même rayon de convergence.

### Théorème 17 (Convergence normale des séries entières sur les disques fermés)

Une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé centré en 0 et de rayon  $r$  strictement inférieur à  $R$ .

### Théorème 18 (Convergence normale des séries entières, cas réel)

Une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans  $] -R; R[$ .

### Corollaire 19 (Continuité de la somme d'une série entière, cas réel)

La somme d'une série entière  $\sum a_n x^n$  de variable réelle et de rayon de convergence  $R > 0$ , est continue sur  $] -R; R[$ .

### Théorème 20 (Intégrale d'une série entière)

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et  $[a; b]$  un segment inclus dans  $] -R; R[$ . Alors :

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b a_n x^n dx \right).$$

### Définition 21

On appelle *série entière primitive* de  $\sum a_n x^n$  la série entière  $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ .

### Corollaire 22 (Primitive d'une série entière)

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors la série entière primitive  $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$  a le même rayon de convergence et sa somme est la primitive qui s'annule en 0 de

la fonction somme  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sur  $] -R; R[$ . En d'autres termes, pour tout  $x \in ] -R; R[$ , on a

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

**Théorème 23 (Dérivabilité de la somme d'une série entière)**

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Sa somme  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -R; R[$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . De plus, on a :

$$\forall x \in ] -R; R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

**Corollaire 24 (La somme d'une série entière est indéfiniment dérivable)**

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Sa somme  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R; R[$  (à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ) et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in ] -R; R[, \quad S^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) a_{n+p} x^n. \end{aligned}$$

**Théorème 25 (Calcul des coefficients d'une série entière)**

Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $S$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

**Corollaire 26 (Identification des coefficients de séries entières)**

Soient  $\sum a_n x^n$  et  $\sum b_n x^n$  deux séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_a > 0$  et  $R_b > 0$ . On suppose qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors  $a_n = b_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Définition 27**

On appelle **exponentielle complexe**, notée  $\exp : z \mapsto e^z$ , la somme de la série entière  $\sum \frac{z^n}{n!}$  qui

est de rayon de convergence infini. Ainsi, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

### Proposition 28

1. Pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ .
2. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a

$$e^z \neq 0 \text{ et } \frac{1}{e^z} = e^{-z}, \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}} \quad \text{et} \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

### Définition 29

On définit les fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique complexes de la manière suivante : pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \operatorname{ch}(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \operatorname{sh}(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

### Définition 30

Soient  $X \subset \mathbb{C}$  contenant 0 et  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est **développable en série entière** en 0 s'il existe une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  et  $r \in ]0; R]$  tels que

$$D(0, r) \subset X \quad \text{et} \quad \forall z \in D(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

### Définition 31

Soient  $X \subset \mathbb{C}$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Soit  $r > 0$  tel que  $D(0, r) \subset X$ . On dit que  $f$  est **développable en série entière sur  $D(0, r)$**  s'il existe une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R \geq r$  (nécessairement  $R > 0$ ) tel que

$$\forall z \in D(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

### Définition 32

Soient  $X \subset \mathbb{C}$  un ouvert et  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est **développable en série entière en  $z_0 \in$**

Si la fonction  $w \mapsto f(z_0 + w)$  est développable en série entière en 0. Dans ce cas, on appelle **développement en série entière** de  $f$  en  $z_0$  la série  $\sum a_n(z - z_0)^n$  telle que pour  $z$  au voisinage de  $z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

### Définition 33

Une fonction  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est **développable en série entière** en 0 s'il existe une série entière  $\sum a_n x^n$  de rayon de convergence  $R > 0$  et  $r \in ]0; R[$  tels que

$$\forall x \in ]-r; r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

### Définition 34

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $C^\infty$ . On appelle **série de Taylor** de  $f$  en  $x_0 \in I$  la série entière :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

### Théorème 35 (Condition nécessaire de développement en série entière)

Si la fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est développable en série entière en  $x_0 \in I$ , alors il existe un voisinage de  $x_0$  sur lequel  $f$  est de classe  $C^\infty$  et le développement en série entière de  $f$  en  $x_0$  est sa série de Taylor en  $x_0$ , c'est-à-dire

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

### Théorème 36 (Propriétés des fonctions développables en série entière)

1. Soient  $f, g : X \subset \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions développables en série entière en  $z_0 \in X$ . Alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda f$ ,  $f + g$  et  $fg$  sont développables en série entière en  $z_0$ .
2. Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction développable en série entière en  $x_0 \in I$ . Alors les dérivées successives de  $f$  ainsi que les primitives de  $f$  sont développables en série entière en  $x_0$  et leur développement en série entière s'obtient par dérivation (resp. intégration) terme à terme à partir de celui de  $f$ .

### Proposition 37 (Développement du binôme)

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto (1 + x)^\alpha$  est développable en série entière sur  $] -1; 1[$  et :

$$\forall x \in ] -1; 1[, \quad (1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

(avec la convention  $\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1) = \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) = 1$  si  $n = 0$ ).

**Famille de l'exponentielle :**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 \cos(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
 \sin(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 \operatorname{ch}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
 \operatorname{sh}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence  $R = +\infty$ .

**Famille du binôme :**

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\
 \frac{1}{1+z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n
 \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| < 1$ ,

$$\begin{aligned}
 -\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
 \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\
 \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\
 \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\
 \arcsin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
 \end{aligned}$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence égal à 1 (sauf pour celle donnant le développement de  $(1+x)^\alpha$  : son rayon vaut  $R = 1$  si  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  et vaut  $R = +\infty$  si  $\alpha \in \mathbb{N}$ ).

FIGURE 1 – Développements en séries entières usuels