

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points. On note α l'extrémité inférieure de I , à savoir $\alpha = \inf I$ (avec la convention $\inf I = -\infty$ si I n'est pas minoré), et β l'extrémité supérieure de I , à savoir $\beta = \sup I$ (avec la convention $\sup I = +\infty$ si I n'est pas majoré). On suppose que I n'est pas un segment, i.e que $\alpha \notin I$ ou $\beta \notin I$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue sur l'intervalle I et F une primitive de f sur I .

Définition 1

On définit $\int_I f(t) dt \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ par $\int_\alpha^\beta f(t) dt = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x) \stackrel{\text{notation}}{=} [F]_\alpha^\beta$.

Proposition 2

Pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue, on a

$$\int_I f(t) dt = \sup \left\{ \int_a^b f(t) dt \mid [a; b] \subset I \right\}.$$

Définition 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On dit que la fonction f est **intégrable** sur I si l'intégrale $\int_I f(t) dt$ est un réel positif fini, ce que l'on écrit aussi $\int_I f(t) dt < +\infty$.

Théorème 4

Soient $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[a; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 5

Soient $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0; a]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 6

Soient f et g deux fonctions continues de I dans \mathbb{R}^+ .

(a). Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, $\int_I (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt$.

(b). On a la relation de Chasles : pour tout $\gamma \in I$, $\int_\alpha^\beta f(t) dt = \int_\alpha^\gamma f(t) dt + \int_\gamma^\beta f(t) dt$.

(c). Si $f \leq g$, on a $\int_I f(t) dt \leq \int_I g(t) dt$.

(d). On a l'inégalité de Cauchy-Scwarz : $\int_I f(t)g(t) dt \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 dt} \sqrt{\int_I g(t)^2 dt}$.

(e). Changement de variable : Si J est un intervalle d'extrémités a et b et $\varphi : J \rightarrow I$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante ($\alpha = \lim_{u \rightarrow a} \varphi(u)$, $\beta = \lim_{u \rightarrow b} \varphi(u)$), on a

$$\int_\alpha^\beta f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$

Corollaire 7

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continues.

- Si $f \leq g$ et g est intégrable sur I , alors f est aussi intégrable sur I .
- Si $f \leq g$ et f n'est pas intégrable sur I , alors g n'est pas intégrable sur I .

Corollaire 8

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et J un intervalle inclus dans I .

- Si f est intégrable sur I , elle est aussi intégrable sur J .
- Si f n'est pas intégrable sur J , elle ne l'est pas non plus sur I .

Définition 9

Soit $V \subset \mathbb{R}$ une partie de \mathbb{R} . On dit que V est un voisinage de

- $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'une des trois parties $]a - \varepsilon; a[\cup]a; a + \varepsilon[$, $]a - \varepsilon; a[$ et $]a; a + \varepsilon[$ est incluse dans V ,
- de $+\infty$ s'il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset V$,
- de $-\infty$ s'il existe $B < 0$ tel que $] - \infty; B[\subset V$.

Définition 10

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est définie au voisinage de a si son domaine de définition est un voisinage de a .

Définition 11

Soient J un intervalle (contenant au moins deux points) de \mathbb{R} , a un point adhérent à J (c'est-à-dire que a appartient à J ou est une extrémité, éventuellement infinie, de J) et $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un voisinage V de a tel que

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note alors $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$.

Définition 12

Soient J un intervalle de \mathbb{R} , a un point adhérent à J et $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) = \mathcal{o}_{x \rightarrow a}(g(x))$.

Définition 13

Soient J un intervalle de \mathbb{R} , a un point adhérent à J et $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}). On dit que f est équivalente à g au voisinage de a s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage V de a telle que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Proposition 14

Soient J un intervalle de \mathbb{R} , a un point adhérent à J et $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}).

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, alors $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$.
- Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$, alors $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$ et $g(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(f(x))$.

Théorème 15

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Si $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow b}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a; b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a; b[$.

Corollaire 16

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Si $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a; b[$, alors f est aussi intégrable sur $[a; b[$.

Corollaire 17

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $f, g : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Si $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$, alors f est intégrable sur $[a; b[$ si et seulement si g l'est.

Définition 18

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I . On dit que f est **absolument intégrable** ou **intégrable** sur I si $\int_I |f(t)| dt < +\infty$ (autrement dit, si $|f|$ est intégrable sur I).

Dans ce cas, on définit $\int_I f(t) dt = \int_I f^+(t) dt - \int_I f^-(t) dt$.

Définition 19

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ continue. On dit que f est **absolument intégrable** ou **intégrable** sur I si $\int_I |f(t)| dt < +\infty$. On pose alors

$$\int_I f(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(f)(t) dt + i \int_I \operatorname{Im}(f)(t) dt$$

Proposition 20

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) continue, absolument intégrable sur I . On a l'inégalité

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

Proposition 21

(Linéarité de l'intégrale)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) continues, absolument intégrables sur I . Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est absolument intégrable sur I et $\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt$.

Proposition 22

(Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I , alors fg est absolument intégrable sur I et on a

$$\int_I |f(t)g(t)| dt \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 dt} \sqrt{\int_I g(t)^2 dt}.$$

Définition 23

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) continue. On dit que l'intégrale impropre $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ **converge** si les primitives de f admettent des limites **finies** en α et β . Si c'est le cas, on pose alors $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x)$, où F est une primitive de f sur I .

Sinon, on dit que l'intégrale impropre $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ **diverge**.

Proposition 24

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) continue. Si f est (absolument) intégrable sur I , alors l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ converge.

On dit que l'intégrale $\int_I f(t) dt$ est **absolument convergente**.

Définition 25

Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Proposition 26

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues. Si $\int_I f(t) dt$ et $\int_I g(t) dt$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt$ converge et vérifie

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt.$$

Proposition 27

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Relation de Chasles : Si $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ converge et $c \in]\alpha; \beta[$, alors les intégrales $\int_{\alpha}^c f(t) dt$ et $\int_c^{\beta} f(t) dt$ convergent et vérifient

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^c f(t) dt + \int_c^{\beta} f(t) dt.$$

2. Changement de variables : Si $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ converge, si $\varphi : J \rightarrow I$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 strictement croissante sur l'intervalle J d'extrémités a et b , alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$

converge et on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

Théorème 28

Soient $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Si $\int_{\alpha}^{\beta} u(t)v'(t) dt$ converge, et si la fonction uv admet des limites finies en α et β , alors $\int_{\alpha}^{\beta} u'(t)v(t) dt$ converge et

$$\int_{\alpha}^{\beta} u'(t)v(t) dt = [uv]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v'(t) dt.$$

Proposition 29

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $b > 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ est (absolument) intégrable sur $[b; +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Proposition 30

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$ est (absolument) intégrable sur $]0; a]$ si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).