Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Algèbre III - Licence de mathématiques générales et applications L2

Examen - Session 2

Jeudi 24 Juin 2021 – Durée 90 minutes

Exercice 1. Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de M se factorise sous la forme $c(X-1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ avec $\lambda_2 = \frac{1}{2}\big(a-1-\sqrt{a^2+2a+5}\big)$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2}\big(a-1+\sqrt{a^2+2a+5}\big)$ et $c \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquelles M a une valeur propre de multiplicité algébrique 2.
3. Déterminer les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquelles M a une valeur propre de multiplicité géométrique 2.
4. Déterminer les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquelles M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquelles M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. On considére la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et montrer que M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. On donnera une matrice P inversible et une matrice T triangulaire telles que $MP = PT$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de M^n.

Exercice 3. Soit $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2 et soit u l'endomorphisme de V défini par

$$u\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de V. Exprimez u dans cette base.
2. Montrer que l'endomorphisme u est diagonalisable et construire une base de vecteurs propres de u.
3. Quel est le polynôme caractéristique de u ?
4. Quel est le polynôme minimal de u ?

Exercice 4. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On suppose que le spectre de u est $\{0,\ 1,\ \lambda\}$ avec $|\lambda| > 1$. On note $\Pi_0,\ \Pi_1,\ \Pi_\lambda$ les projecteurs sprectraux associés aux valeures propres.

1. Justifier que u est diagonalisable.
2. Montrer que $\Pi_1 = \frac{1}{1-\lambda}(u^2 - \lambda u)$ et que $\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda^2-\lambda}(u^2 - u)$.

   Indication : On pourra utiliser l'expression de u en fonction de ses projecteurs spectraux.

3. En déduire une expression de Π_0 comme polynôme en u.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Montrer l'équivalence suivante :

   $(\Pi_0 + \Pi_1)(x) \neq x \iff$ la suite $(u^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^3$ n'est pas bornée.