Examen terminal

VENDREDI 10 JANVIER 2020 – DURÉE 120 MINUTES

Les calculatrices et les documents ne sont pas permis.

Exercice 1. Soient a, b, c des réels, $n \geq 1$ un entier et soit $D_n(a, b, c)$ le déterminant de la matrice $n \times n$ réelle définie par

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

avec la convention $D_1(a, b, c) = a$.

1. En développant le déterminant par rapport à la première ligne, montrer que pour $n \geq 3$,

$$D_n(a, b, c) = \alpha D_{n-1}(a, b, c) + \beta D_{n-2}(a, b, c)$$

   où α et β sont des réels qu'on exprimera en fonction de a, b, c.

2. Montrer que $D_n(5, 4, 1) = 4^n t + s$ où t et s sont des scalaires à déterminer.

Exercice 2. On considère la suite définie par $u_0 = 2u_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2}$.

1. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$, déterminer la matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \geq 2$, $X_n = A \cdot X_{n-1}$.
2. Calculer le spectre de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $P^{-1}AP = T$.
4. Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n.
5. Déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 3. Résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} x'(t) &= 8x(t) + 12y(t) - 6z(t) \\ y'(t) &= -3x(t) - 4y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &= 3x(t) + 6y(t) - z(t) \end{aligned}$$

avec conditions initiales $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, de dimension finie ≥ 3. Soit u un endomorphisme de E qui satisfait

$$u^3 = \mathrm{id}, \qquad u \neq \mathrm{id}, \qquad u \text{ admet au moins une valeur propre (réelle).}$$

1. Déterminer le polynôme minimal de u.
2. Est-ce que u est diagonalisable ?
3. Montrer que $\Pi = \frac{1}{3}(\mathrm{id} + u + u^2)$ est un projecteur et que son image est un espace propre de u. Quel est cet espace propre ?
4. Soient $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$.
   (a) Montrer que
   $$(x^2 + x + 1)^m = x^{2m} + mx^{2m-1} + p(x)$$
   où $p(x)$ est un polynôme de degré $\leq 2m - 2$.
   (b) En déduire que
   $$(x-1)^n(x^2 + x + 1)^m = x^{2m+n} + (m-n)x^{2m+n-1} + q(x)$$
   où q est un polynôme de degré $\leq 2m + n - 2$
5. (a) Montrer que le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de u ont les mêmes racines complexes. En déduire que le polynôme caractéristique de u est de la forme $(x-1)^n(x^2+x+1)^m$ avec n et m des entiers positifs non nuls.
   (b) Soit a_1 la multiplicité algébrique de la valeur propre 1. Déduire de ce qui précède que
   $$\mathrm{trace}(u) = \frac{3}{2}a_1 - \frac{1}{2}\dim E.$$