Examen final corrigé

durée 120 minutes

Exercice 1. Soient x une indéterminée, $a \in \mathbb{R}$ fixé et $A = \begin{pmatrix} x & a & x \\ x & x & a \\ a & x & x \end{pmatrix}$. En calculant le déterminant de A, donner les valeurs de x pour lesquelles A est inversible dans $M_3(\mathbb{R})$.

Corrigé : Dans le calcul du déterminant, on fait les opérations suivantes : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, on factorise par $(2x + a)$ puis on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ce qui donne la suite d'égalités :

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2x+a & a & x \\ 2x+a & x & a \\ 2x+a & x & x \end{pmatrix} = (2x+a)\det \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 1 & x & a \\ 1 & x & x \end{pmatrix} = (2x+a)\det \begin{pmatrix} 1 & a & x \\ 0 & x-a & a-x \\ 0 & x-a & 0 \end{pmatrix}.$$

On développe alors par rapport à la colonne 1, puis on calcule le déterminant 2×2 obtenu et finalement on a : $\det(A) = (2x + a)(x - a)^2$. On sait que A est inversible si et s. si $\det(A) \neq 0$ donc A est inversible ssi ($x \neq a/2$ et $x \neq a$).

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A, ainsi que leur multiplicité algébrique et leur multiplicité géométrique.
2. Trigonaliser A.
3. Donner une formule pour A^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Corrigé :

1. $\det(A - \lambda 1_3) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2 - \lambda)^3$. Donc $\lambda = 2$ est la seule valeur propre et elle a multiplicité algébrique 3. $(A - 2\,1_3) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ a rang 1, donc la multiplicité géométrique de λ est 2.
2. $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, 2)$ sont des vecteurs propres indépendents. $v_3 = (0, 0, 1)$ est indépendent de v_1 et v_2 et satisfait $(A - 2\,1_3)v_3 = -v_1 - v_2$. D'où, avec la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nous avons
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D + N$$
3. Comme $N^2 = 0$ et $DN = ND$ on a $(D + N)^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & -n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

   L'inverse de P est donné par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. D'où
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & -n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & -n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2+4n & -4n & -2n \\ 2n & 2-2n & -n \\ 4n & -4n & 2-2n \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit A la matrice réelle :
$$A = \begin{pmatrix} -13 & 10 & 10 \\ 15 & -8 & -10 \\ -30 & 20 & 22 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de $A - 2\mathrm{I}_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de A.

   Indication : les choses se simplifient si on prend en compte le résultat de la question 1.
3. Résoudre le système différentiel $X'(t) = A \cdot X(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où x, y, z sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de classe C^∞.

Corrigé :

1. Le rang est 1 car les trois colonnes de $A - 2I$ sont colinéaires.
2. Par la question 1, on sait que 2 est une valeur propre et sa multiplicité (algébrique) m_2 satisfait $m_2 \geq \dim(E_2) = 2$. Par conséquent le polynôme caractéristique de A est $P_A = (X-2)^2(X-\alpha)$. La trace de A est 1 ce qui donne $2 + 2 + \alpha = 1$ d'où $\alpha = -3$.
3. Dans $A-2I = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 10 \\ 15 & -10 & -10 \\ -30 & 20 & 20 \end{pmatrix}$, on a les relations suivantes entre colonnes : $2C_1+3C_2 = 0$ et $C_2-C_3 = 0$.

   Par conséquent, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $E_2(A)$.

   Dans $A + 3I = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 10 \\ 15 & -5 & -10 \\ -30 & 20 & 25 \end{pmatrix}$ on trouve la relation $C_1 - C_2 + 2C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartient à $E_{-3}(A)$.

   On pose alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et on a $P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

   Par calcul, on obtient $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & -5 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. La solution du système différentiel est donnée par $X(t) = e^{tA} \cdot X_0$ où X_0 est un vecteur quelconque de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ ce qui donne $X(t) = e^{tPDP^{-1}}X_0 = Pe^{tD}P^{-1}X_0$.

   Après calcul, on obtient $X(t) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} + 3e^{-3t} & 2e^{2t} - 2e^{-3t} & 2e^{2t} - 2e^{-3t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-3t} & -e^{2t} + 2e^{-3t} & -2e^{2t} + 2e^{-3t} \\ -6e^{2t} + 6e^{-3t} & 4e^{2t} - 4e^{-3t} & 5e^{2t} - 4e^{-3t} \end{pmatrix} \cdot X_0$

Exercice 4. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 3$. On suppose que le polynôme minimal m_u de u est donné par
$$m_u(X) = (X-1)(X^2 - 2\sqrt{2}X + 2)$$
et son déterminant par
$$\det(u) = 2$$

1. Discuter si u est diagonalisable ou trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les valeurs propres de u avec leur multiplicité algébrique et géométrique.
3. Déterminer la dimension des espaces caractéristiques.
4. Donner une matrice diagonale D et une matrice nilpotente N, t.q. $DN = ND$ et la matrice associée à u dans une base $\mathcal{B}$ est donnée par
$$[u]_{\mathcal{B}} = D + N.$$

Corrigé :

1. On peut factoriser $m_u(X) = (X-1)(X^2 - 2\sqrt{2}X + 2) = (X-1)(X-\sqrt{2})^2$. m_u est donc scindé sur $\mathbb{R}$ mais pas à racines simples. Il en suit que u est trigonalisable sur $\mathbb{R}$, mais pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. Les valeurs propres de u étant les racines de m_u, on en trouve deux distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \sqrt{2}$. Vu que $2 = \det(u) = \lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}$ on doit avoir $m_2 = 2$ et $m_1 = n - m_2$ (ici m_i est la multiplicité algébrique).

   Comme u est trigonalisable, l'espace vectoriel E se decompose en une somme directe de ses espaces caractéristiques : $E = F_{\lambda_1} \oplus F_{\lambda_2}$. Comme λ_1 est une racine simple du polynôme minimal, la reduction $u_{F_{\lambda_1}}$ est diagonalisable et donc $m_1 = g_1$ (la multiplicité géométrique). De l'autre coté, λ_2 n'est pas une racine simple du polynôme minimal, donc $u_{F_{\lambda_2}}$ n'est pas diagonalisable et $g_2 \neq m_2$. Comme $g_2 \geq 1$, la seule possibilité qui nous reste est $g_2 = 1$.

3. La dimension d'un espace caractéristique d'un endomorphisme trigonalisable est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre concernée. Donc $\dim F_{\lambda_1} = n-2$, $\dim F_{\lambda_2} = 2$.

4. Soit b_1 un vecteur propre pour λ_2. Comme $g_2 = 1$ ce vecteur engendre $\ker(u - \lambda_2 \operatorname{id}) \subset F_{\lambda_2}$. Comme $\dim F_{\lambda_2} = 2$ on trouve un vecteur $b_2 \in F_{\lambda_2}$ qui complète b_1 en une base $\{b_1, b_2\}$ de F_{λ_2}. De plus $(u - \lambda_2 \operatorname{id})^2(b_2) = 0$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $(u - \lambda_2 \operatorname{id})(b_2) = ab_1$, c.à.d. $u(b_2) = \lambda_2 b_2 + ab_1$.

   Soit $\{b_3, \cdots, b_n\}$ une base pour F_{λ_1} et $\mathcal{B} = \{b_1, \cdots, b_n\}$. $\mathcal{B}$ est alors une base pour E et $[u]_{\mathcal{B}} = D + N$ avec $D = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1, \cdots, 1)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \oplus 1_{n-2}$. On verifie bien que D et N commutent.