Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2018-2019

Analyse IV — Durée : 2 heures

Examen final du mardi 21 mai 2019

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation. Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème tiendra compte de la longueur du sujet.

Questions de cours :

1. Rappeler la définition d'une fonction f *différentiable* de E dans F, où E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies.
2. Rappeler précisément la formule pour la différentielle de $f \circ g$ en un point a, quand $f \circ g$ est bien défini et que f et g sont différentiables.

Exercice 1. On considère la série entière complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{(-1)^n} z^n$.

1. (a) Montrer que la série converge pour $|z| < 1$.
   (b) Montrez que la série ne converge pas pour $z = 1$.
   (c) En déduire le rayon de convergence de la série entière (en justifiant complètement).

   On s'intéresse maintenant seulement à la série *réelle* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^{(-1)^n} x^n$.

2. (a) Donnez une expression exacte de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ en précisant son domaine de convergence que l'on notera I.
   (b) Donnez une expression exacte de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} 2n\, x^{2n}$ pour tout $x \in I$ en justifiant complètement.
   (c) Donnez une expression exacte de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in I$ en justifiant complètement.
   (d) En déduire une expression exacte de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$ pour tout $x \in I$ en justifiant complètement.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in]0; +\infty[\,, \quad u_n(t) = \frac{1}{n} t^n \ln(t) \quad \text{et} \quad u_n(0) = 0.$$

1. Montrer que le domaine de convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ est $[0; 1]$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations de la fonction u_n sur $]0; 1]$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0; 1]$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la continuité de la fonction u_n sur $[0; 1]$.
   (b) Montrer que la somme S de la série de fonctions $\sum u_n$ est continue sur $[0; 1]$.
   (c) Exprimer explicitement $S(t)$ pour $t \in [0; 1]$ à l'aide de fonctions usuelles (on pensera aux développements en série entière usuels).

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$ où l'on a noté $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.

   (c) Déterminer la valeur de I, en admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3. On note $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On rappelle que E peut être muni de la norme infinie $\|\ \|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|\,.$$

On définit une nouvelle application sur E par :

$$\forall f \in E, \quad N(f) = |f(1)| + \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que N définit une norme sur E.
2. On considère l'application $u : E \longrightarrow E$ définie par

$$\forall f \in E, \quad u(f) : x \in [0;1] \longmapsto f(x) - f(0).$$

   (a) Montrer que u est une application linéaire.

   (b) Montrer que pour E muni de la norme $\|\ \|_\infty$, l'application u est continue sur E.

   (c) Pour tout entier $n \geq 2$, on définit la fonction f_n appartenant à E comme suit :

$$\forall x \in \left[0;\frac{2}{n}\right], \quad f_n(x) = 1 - \frac{n}{2}x \quad \text{ et } \quad \forall x \in \left]\frac{2}{n};1\right], \quad f_n(x) = 0.$$

      i. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge vers la fonction nulle 0_E dans E muni de la norme N.

      ii. Calculer $N(u(f_n))$ pour $n \geq 2$.

      iii. En déduire que, pour E muni de la norme N, u n'est pas continue.

3. Les normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. (Deux parties indépendantes)

1. Montrez que l'ensemble $A = \{(t,\cos(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   Montrez que l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < 3x^2 + 4y < 1\}$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.
2. On se place dans un espace vectoriel normé E. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés non vides de E tels que $F_{n+1} \subset F_n$ pour tout n. On pose $F = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

   (a) Donnez un exemple d'espace vectoriel normé et de suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, telle que $F = \emptyset$.

   On suppose désormais que les ensembles F_n sont tous compacts. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$.

   (b) Montrez qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément $x \in F_0$.

   (c) Soit $p \in \mathbb{N}$.

      i. Montrez que pour tout $n \geq p$, $\varphi(n) \geq p$.

      ii. En déduire que $x \in F_p$, puis que $F \neq \emptyset$.