Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2016-2017

Analyse IV — Durée : 2 heures

Examen final du mercredi 10 mai 2017

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.
Les quatres exercices sont indépendants. Le barême est indicatif.

Question de cours : (2 points) Soient $(E, ||.||_E)$ et $(F, ||.||_F)$ deux espaces vectoriels normés (de dimensions finies) et $f : E \to F$ une fonction. Donner la définition de la différentiabilité de f en un point $a \in E$.

Exercice 1. (5 points) On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) = 0.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions f somme d'une série entière qui sont solutions de (E) et vérifient les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On exprimera les solutions à l'aide de fonctions usuelles et on précisera les rayons de convergence des séries entières associées.

Exercice 2. (5 points) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. (a) Montrer que l'application de dérivation $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $D(P) = P'$ n'est pas continue pour N. *Indication : on pourra pour cela considérer les polynômes X^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La restriction de D à $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle continue pour N ?
3. Pour tout entier naturel n, on considère la forme linéaire ψ_n définie par :
$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \psi_n(P) = P^{(n)}(0).$$
   Montrer que ψ_n est continue sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N.

Exercice 3. (8 points) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ainsi que l'ensemble $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \leq y \leq 0\}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble K.
2. Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer explicitement l'intérieur de K, que l'on notera $\overset{\circ}{K}$, puis la frontière de K, que l'on notera Γ.
4. Montrer que la fonction f admet des extrema globaux sur K (on ne demande pas de les déterminer explicitement).
5. Déterminer les points critiques de f sur $\overset{\circ}{K}$.
6. À l'aide de deux paramétrisations bien choisies, déterminer les extrema de la restriction de f à Γ.
7. En déduire les points d'extrema globaux de f sur K ainsi que les valeurs de ces extrema.

Exercice 4. (8,5 points) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$g_n : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (-1)^n x^{pn}. \end{array}$$

1. Soit $t \in]0;1[$.
   (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge normalement sur $[0;t]$.
   (b) On note G la fonction somme de la série de fonctions $\sum g_n$. Pour tout $x \in [0;1]$, justifier l'existence de $G(x)$ et déterminer explicitement sa valeur.
   (c) En déduire l'égalité :

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{pn+1}}{pn+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{(-1)^n t^{pn+1}}{pn+1}. \end{array}$$

   (a) Étudier la convergence absolue simple de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ sur $[0;1]$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0;1]$?
   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.
   (c) On note F la fonction somme de la série de fonctions $\sum f_n$. Montrer que F est continue sur $[0;1]$.
   (d) Déduire des questions précédentes l'identité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x.$$

   (e) BONUS : en déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Correction de l'examen final du mercredi 10 mai 2017

Correction de l'exercice 1

- *Analyse :* Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence R supposé strictement positif. D'après le cours sur les séries entières, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et dérivable terme à terme sur cet intervalle. Ainsi, pour tout $x\in]-R;R[$, on a

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\quad \text{et}\quad f''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Comme $f(0)=a_0$ et $f'(0)=a_1$, les conditions $f(0)=1$ et $f'(0)=0$ sont équivalentes à $a_0=1$ et $a_1=0$. De plus, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned}
& f \text{ est solution de } E \text{ sur }]-R;R[\\
\iff\ & \forall x\in]-R;R[,\quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}-2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=0\\
\iff\ & \forall x\in]-R;R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} n a_n x^n-2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=0\\
\iff\ & \forall x\in]-R;R[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_n\right)x^n=0\\
\iff\ & \forall n\in\mathbb{N},\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n+1)a_n=0 \quad \text{par unicité du développement en série entière}\\
\iff\ & \forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=\frac{2}{n+2}a_n.
\end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned}
& f \text{ est solution de } (E) \text{ avec les conditions données}\\
\iff\ & a_0=1,\quad a_1=0\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+2}=\frac{2}{(n+2)}a_n\\
\iff\ & a_0=1\quad \text{et}\quad \forall p\in\mathbb{N},\quad \left\{\begin{array}{l} a_{2p+1}=0\\ a_{2(p+1)}=\dfrac{2}{(2p+2)}a_{2p}=\dfrac{1}{p+1}a_{2p}\end{array}\right. \quad (S)\quad \text{par récurrence immédiate.}
\end{aligned}$$

On remarque que $a_2=a_0=1$, $a_4=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}$, $a_6=\frac{1}{3}a_4=\frac{1}{3\times 2}$. On montre alors facilement par récurrence que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a_{2p}=\frac{1}{p!}$. Ainsi, pour tout $x\in]-R;R[$, on a

$$f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}x^{2p}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}x^{2p}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}(x^2)^p=e^{x^2}$$

car on sait que

$$\forall u\in\mathbb{R},\quad e^u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}u^n.$$

- *Synthèse :* posons $f: x\in\mathbb{R}\longmapsto e^{x^2}$, puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(x)=e^{x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^{2n},$$

f est la somme d'une série entière sur $\mathbb{R}$ et celle-ci est de rayon de convergence $+\infty$ (puisqu'elle converge pour tout réel x). Les coefficients de cette série entière vérifient le système (S) obtenu lors de l'analyse, donc en remontant les équivalences, la fonction f est bien solution de (E) avec les conditions demandées. On aurait aussi pu dériver deux fois f et remplacer directement dans (E) pour vérifier l'équation.

Finalement, il existe une unique fonction somme de série entière solution de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, il s'agit de la fonction $x \longmapsto e^{x^2}$ et le rayon de convergence de la série entière associée est $+\infty$

Correction de l'exercice 2

1. • Tout d'abord, remarquons que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!}$ est finie puisqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $P^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ (il suffit de prendre $k = \deg(P) + 1$ si P n'est pas le polynôme nul, et k quelconque sinon). Par suite, la fonction N est bien définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^+$.

   • Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On peut remarquer que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $P^{(k)}(0) = k! a_k$ et pour tout $k > n$, $P^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[X]}$ d'où $P^{(k)}(0) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} N(P) = 0 \quad &\iff \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} = 0 \\ &\iff \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} = 0 \quad \text{(somme nulle de termes positifs)} \\ &\iff \quad \forall k \in [\![0; n]\!], \quad |a_k| = 0 \quad \text{(d'après la remarque ci-dessus)} \\ &\iff \quad P = 0_{\mathbb{R}[X]}. \end{aligned}$$

   • Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par linéarité de la dérivation et homogénéité de la valeur absolue, il vient

$$N(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|(\lambda P)^{(k)}(0)\right|}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\lambda| \left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} = |\lambda| N(P).$$

   • Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, encore une fois par linéarité de la dérivation et inégalité triangulaire de la valeur absolue,

$$N(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|(P+Q)^{(k)}(0)\right|}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\right|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|Q^{(k)}(0)\right|}{k!} = N(P) + N(Q)$$

   ce qui achève de démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Tout d'abord, l'application D est linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P_n = X^n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \neq n$, on a $P_n^{(k)}(0) = 0$ et $P_n^{(n)}(0) = n!$ ce qui entraîne

$$N(P_n) = \frac{|n!|}{n!} = 1.$$

   Ainsi, P_n appartient à la sphère unité de $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N. De plus, on remarque que pour tout $n \geq 1$,

$$N(D(P_n)) = N(nX^{n-1}) = |n| N(P_{n-1}) = n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

   ce qui démontre que l'application linéaire D n'est pas bornée sur la sphère unité (associée à N). Elle n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}[X]$ pour la norme N.

   (b) Notons D_n la restriction de D à $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque l'ensemble de départ $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie, l'application linéaire $D_n : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$, ceci quelle que soit la norme dont on a muni $\mathbb{R}_n[X]$, en particulier pour N.

3. On a $\psi_n : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ linéaire. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors

$$|\psi_n(P)| = \left|P^{(n)}(0)\right| = n! \frac{\left|P^{(n)}(0)\right|}{n!} \leq n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} = n! N(P)$$

puisque tous les autres termes sont positifs. Ainsi, on a trouvé une constante $n!$ vérifiant,

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad |\psi_n(P)| \leq n! N(P)$$

ce qui démontre la continuité de ψ_n par l'une des caractérisations équivalentes de la continuité pour les applications linéaires.

Correction de l'exercice 3

1. Puisque $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, les compacts de $\mathbb{R}^2$ sont exactement les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}^2$. De plus, toutes les normes sont équivalentes, donc on peut choisir de travailler avec la norme que l'on veut sur $\mathbb{R}^2$.
   - On peut utiliser la caractérisation séquentielle pour montrer que K est un fermé de $\mathbb{R}^2$, ou remarquer que
   $$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 - y \leq 0\right\} = g^{-1}(]-\infty; 0])$$
   avec $g : (x,y) \longmapsto x^2 - 1 - y$ polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^2$. Par suite, K est compact comme image réciproque par une fonction continue d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.
   - Soit $(x,y) \in K$, alors en particulier $x^2 - 1 \leq 0$ d'où $x^2 \leq 1$. Par conséquent $|x| \leq 1$. De plus, puisque $x^2 - 1 \leq y \leq 0$, on a $|y| = -y \leq \left|1 - x^2\right| = 1 - x^2 \leq 1$ aussi. On a donc démontré que pour tout $(x,y) \in K$, $\|(x,y)\|_\infty = \max(|x|, |y|) \leq 1$, ce qui prouve que K est borné. C'est donc bien un compact de $\mathbb{R}^2$.
2. - On sait que l'intérieur de K est le plus grand ouvert inclus dans K. On intuite que l'intérieur de K est l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 < y < 0\}$. Avec les notations ci-dessus,
   $$A = g^{-1}(]-\infty; 0[)$$
   ce qui démontre que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue. Supposons par l'absurde que $A \subsetneq \overset{\circ}{K}$, alors il existe $(x,y) \in \overset{\circ}{K}$ tel que $x^2 - 1 = y$ ou $y = 0$. Supposons par exemple $y = 1 - x^2$. Par définition de l'intérieur, il existe $r > 0$ tel que $B := B_{\| \|_\infty}((x,y), r) \subset K$. L'élément $(x, y + r/2)$ appartient à B puisque $\|(x, y + r/2) - (x,y)\|_\infty = \|(0, r/2)\|_\infty = r/2 < r$, or son ordonnée vérifie
   $$y + r/2 = 1 - x^2 + r/2 > 1 - x^2$$
   ce qui est contradictoire avec le fait que $(x, y + r/2) \in K$. On raisonne de même si (x,y) vérifie $y = 0$, en prenant cette fois l'élément $(x, y - r/2)$ par exemple. Finalement, on a bien démontré que $\overset{\circ}{K} = A$.
   - Par définition, la frontière est
   $$\Gamma = \overline{K} \backslash \overset{\circ}{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - 1 = y \text{ ou } y = 0\}$$
   puisque $\overline{K} = K$ puisque K est fermé.
3. La fonction f est continue (car polynomiale) sur le compact K non vide (car $(0,0) \in K$) et à valeurs réelles, d'après le théorème des bornes atteintes, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur K. La fonction f admet donc un minimum et un maximum global sur K.
4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur l'ouvert $\overset{\circ}{K}$. Soit $(x,y) \in \overset{\circ}{K}$, on a :

$$(x,y) \text{ point critique de } f \iff \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2x(1-y) = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{array}\right. \iff (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (\pm\sqrt{2}, 1)$$

ce qui dand tous les cas est impossible puisque $(0,0)$ n'appartient pas à $\overset{\circ}{K}$ et de même pour $(\pm\sqrt{2},1)$ (on a vu que $\|(x,y)\|_\infty \leq 1$). Ainsi, f n'admet aucun point critique dans $\overset{\circ}{K}$.

5. On a vu que

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 - 1 = y\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} := \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

La restriction de f à Γ_1 s'identifie avec la fonction d'une variable réelle

$$f_1 : x \in [-1;1] \longmapsto (x^2-1)^2 - x^2(x^2-1) + x^2 = x^4 - 2x^2 + 1 - x^4 + x^2 + x^2 = 1$$

qui est constante donc tous les points de Γ_1 sont des points d'extrema (minima et maxima) de la restriction de f à Γ_1. La restriction de f à Γ_2 s'identifie avec la fonction d'une variable réelle

$$f_2 : x \in [-1;1] \longmapsto x^2$$

qui est décroissante sur $[-1;0]$ et croissante sur $[0;1]$, avec $f_2(-1) = 1$, $f_2(0) = 0$ et $f_2(1) = 1$. Finalement, la restriction de f à Γ a comme minimum 0, atteint en $(0,0)$ et comme maximum 1 atteint sur tous les points de $\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 = y\}$.

6. On a vu que f admet des extrema globaux sur K. Ceux-ci sont atteints, soient en un point de la frontière, auquels cas ce sont des extrema globaux de la restriction de f à Γ, que l'on a étudiés ci-dessus, soit en un point de l'ouvert $\overset{\circ}{K}$, mais f n'en admet pas. Par conséquent, le minimum et le maximum global de f sont respectivement 0 atteint seulement en $(0,0)$, et 1 atteint en tous les points (x,y) tels que $y = x^2 - 1$.

Correction de l'exercice 4

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur le segment $[0;t]$, donc elle est bornée sur $[0;t]$. De plus, par croissance de la fonction $x \longmapsto x^{pn}$ sur $[0;t]$, on a

$$\|g_n\|_{\infty;[0;t]} = \sup_{x\in[0;t]} |g_n(x)| = \sup_{x\in[0;t]} x^{pn} = t^{pn} = (t^p)^n.$$

La série $\sum (t^p)^n$ converge comme série géométrique de raison t avec $0 < t < 1$. Par suite, $\sum \|g_n\|_{\infty;[0;t]}$ converge, ce qui démontre la convergence normale de la série de fonctions $\sum g_n$ sur $[0;t]$.

(b) La convergence normale entraîne en particulier la convergence simple de $\sum g_n$ sur $[0;t]$, ce qui justifie l'existence de $G(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ pour tout $x \in [0;t]$. Par sommation géométrique de raison $-x^p$ avec $|-x^p| < 1$, on trouve, pour tout $x \in [0;t]$,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{pn} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^p)^n = \frac{1}{1+x^p}.$$

(c) Par la question précédente, on a

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur le segment $[0;t]$, et que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur ce segment, le théorème d'interversion série/intégrale implique :

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^t g_n(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{pn+1}x^{pn+1}\right]_0^t \qquad \text{car } pn+1\neq 0\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{pn+1}}{pn+1}.\end{aligned}$$

2. (a) On remarque que pour $t=1$, $|f_n(t)| = \dfrac{1}{pn+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $p\neq 0$, on a l'équivalence

$$|f_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{pn}$$

qui diverge par Riemann. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |f_n(1)|$ diverge, ce qui démontre que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas absolument simplement en 1, donc a fortiori sur $[0;1]$.

Comme la convergence normale entraîne la convergence absolue simple, $\sum f_n$ ne peut pas converger normalement sur $[0;1]$.

(b) Soit $t\in[0;1]$. On remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(-1)^n f_n(t) = \dfrac{t^{pn+1}}{pn+1}\geq 0$ donc la série $\sum f_n(t)$ est une série alternée.

- On a $0\leq |f_n(t)| = \dfrac{t^{pn+1}}{pn+1}\leq \dfrac{1}{pn+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (puisque $p\in\mathbb{N}^*$) donc la suite $(|f_n(t)|)_n$ converge vers 0.
- De plus, la suite $(|f_n(t)|)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{t^{pn+1}}{pn+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante comme produit de deux suites décroissantes à termes positifs.

D'après le critère des séries alternées, la série $\sum f_n(t)$ converge. Ceci démontre au passage la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$. De plus, en notant R_n le reste d'ordre n de cette série de fonctions, on obtient (toujours par le critère des séries alternées) :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |R_n(t)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(t)\right| \leq |f_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{p(n+1)+1}.$$

Par conséquent, la fonction R_n est bornée sur $[0;1]$ et comme la borne supérieure est le plus petit des majorants, on obtient

$$0\leq \|R_n\|_{\infty;[0;1]} = \sup_{t\in[0;1]}|R_n(t)| \leq \frac{1}{p(n+1)+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $[0;1]$, ce qui démontre la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0;1]$.

(c) Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0;1]$ et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0;1]$, la fonction somme F est continue sur $[0;1]$.

(d) D'après la question 1c et les notations de l'exercice, on sait que

$$\forall t\in[0;1],\quad F(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x = H(t)$$

où l'on a noté $H : t \in [0;1] \longmapsto \displaystyle\int_0^t \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$. D'après le théorème fondamental de l'intégration (puisque la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^p}$ est continue sur $[0;1]$), la fonction H est continue. La question précédente permet alors d'écrire

$$F(1) = \lim_{t\to 1} F(t) = \lim_{t \to 1} H(t) = H(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$$

ce qui est exactement l'égalité demandée.

(e) Il suffit de prendre $p = 1$ pour la première somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln(2)$$

et $p = 2$ pour la seconde somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$