Université Claude Bernard Lyon 1 - semestre automne 2013/2014
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

UE Math III Algèbre - MAT2020L

CONTRÔLE FINAL

- VENDREDI 10 JANVIER 2014, 10H30 - 12H30 -
- SANS DOCUMENT NI CALCULETTE. -
- TOUTE RÉPONSE DOIT ÊTRE JUSTIFIÉE. -
- LE BARÈME EST INDICATIF.-

I (4 pts)

Résoudre le système différentiel en la variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$$

On pourra commencer par diagonaliser une matrice appropriée.

II (5 pts=3,5+1,5)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \geq 1$.
A) Soit f un endomorphisme de E vérifiant

$$f^2 - f = 2 \cdot \mathrm{Id}_E, \quad f \neq -\mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \neq 2 \cdot \mathrm{Id}_E.$$

1. Est-ce que f est inversible ?
2. Est-ce que f est diagonalisable ?
3. Quelles sont les valeurs propres de f ?
4. Exprimer les projecteurs spectraux de f en fonction de f.

B) Soit g un endomorphisme de E dont le rang est r ($r < n$).

1. Expliquer pourquoi 0 est une valeur propre de g.
2. Donner un encadrement de la multiplicité de la valeur propre 0 de g.

III (5 pts=3+2)

1. Soit $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$ et $i^2 = -1$. On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 2\pi i m & a \\ 0 & 2\pi i n \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

   a) Est-ce que M est diagonalisable ?
   b) Trouver une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N telle que

$$M = D + N \quad \text{et} \quad DN = ND.$$

   c) Calculer $\exp(M)$.

2. Soient A et B deux matrices carrées dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ définies par

$$A = \begin{bmatrix} 2\pi i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2\pi i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler, sans démonstration, une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.
   b) Vérifier que $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$. Est-ce que $AB = BA$?

IV (10 pts=1,5+1,5+2+1+1+2+1)

Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Quelle est la trace de A ? Quel est le déterminant de A ? La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire les valeurs propres de A.
3. Déterminer le polynôme minimal de A. Est-ce que A est diagonalisable ?
4. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique. Exprimer les matrices dans la base canonique des projecteurs spectraux de u en fonction de A.
5. Exprimer en fonction de A une matrice diagonalisable D et une matrice nilpotente N telles que $A = D + N$ et $DN = ND$.
6. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer N^m et exprimer A^m en fonction des projecteurs spectraux de A et de N.
7. Exprimer e^{tA} en fonction de t, des matrices des projecteurs spectraux de u et de N.