Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023

Mathématiques IV - Cursus préparatoire 2A Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Exercice 1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note b_a l'application de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par : pour tous (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$,

$$b_a((x,y),(x',y')) = xx' + axy' + ayx' + 9yy'.$$

1. Discuter en fonction du paramètre réel a si l'application b_a est ou non un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit a un réel pour lequel b_a est un produit scalaire. Écrire la matrice A de b_a dans la base canonique, puis rappeler la formule du cours qui établit un lien entre la valeur $b_a((x,y),(x',y'))$, la matrice A et les deux vecteurs-colonnes $S = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $S' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Exercice 2. E désigne l'espace des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$. Sur E, on notera $\|.\|_2$ la norme associée au produit scalaire usuel, à savoir : $\langle f \mid g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$.
Pour f et g dans E, on posera :

$$C(f,g) = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\, f(t)g(t)\,dt$$

1. Montrer que C est un produit scalaire sur E.

   Dans toute la suite de l'exercice, on notera N la norme associée au produit scalaire C, c'est-à-dire $N(f) = \sqrt{C(f,f)}$.
2. Montrer que pour toute fonction f de E, on a l'inégalité :

$$N(f) \leq \|f\|_2.$$

3. Pour chaque $n \geq 1$ on note f_n la fonction de $[0, 2\pi]$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{n}\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; 2\pi\right] \end{cases}.$$

   (a) Tracer le graphe de f_n et justifier qu'elle est élément de E.

   (b) Pour chaque $n \geq 1$, calculer le réel $\|f_n\|_2$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ a-t-elle une limite pour la norme $\|.\|_2$ quand n tend vers l'infini ?

   (c) Pour chaque $n \geq 1$, montrer l'inégalité : $N(f_n) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ a-t-elle une limite pour la norme N quand n tend vers l'infini ?
4. Les normes $\|.\|_2$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 3. Soit E un espace normé.

1. Soit e un élément de E. Montrer que $\{e\}$ est fermé dans E.
2. En déduire que toute partie finie non vide de E est fermée dans E.

Exercice 4. On note $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$ et F son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que U est ouvert dans $\mathbb{R}^2$ en utilisant le critère séquentiel de fermeture pour prouver que F est fermé.
2. Soit (a, b) un point de U.
   (a) On note $r = \dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$.
      i. Soit (x, y) un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que $\|(x, y) - (a, b)\|_2 < r$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(x - a, y - b)$ et $(1, -1)$, majorer le réel $|x - a - y + b|$ et en déduire que $(x, y) \in U$.
      ii. Montrer que si R est un réel vérifiant $R > r$, la boule de centre (a, b) et de rayon R pour la norme $\|.\|_2$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas incluse dans U. Suggestion : on pourra dans un premier temps vérifier que le point $(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2})$ appartient à cette boule.
   (b) i. Représenter graphiquement la boule de centre (a, b) et de rayon $a - b$ pour la norme $\|.\|_1$ de $\mathbb{R}^2$, puis montrer qu'elle est incluse dans U.
      ii. Montrer que si R est un réel vérifiant $R > a - b$, la boule de centre (a, b) et de rayon R pour la norme $\|.\|_1$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas incluse dans U.