On rappelle que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que l'on note $\alpha = \inf I$, $\beta = \sup I$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue.

$$f \text{ est intégrable sur } I \iff \int_I f(t)\,\mathrm{d}t := [F]_\alpha^\beta < +\infty$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue.

$$f \text{ est intégrable sur } I \iff \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue. Notons F une primitive quelconque de f sur I.

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad F \text{ admet des limites finies en } \alpha^+ \text{ et en } \beta^-$$

Attention : il s'agit bien d'étudier les limites d'une **primitive** de f et pas de f elle-même !!

$$\begin{aligned} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge} \\ &\Longleftrightarrow \quad f \text{ est intégrable sur } I \end{aligned}$$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue.

$$f \text{ intégrable sur } I \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \quad \int_I f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

(*i.e.* l'absolue convergence de l'intégrale implique la convergence)

Si l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge mais pas absolument (*i.e.* f n'est pas intégrable sur I), on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Cas où on a équivalence : $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\iff$ f est intégrable sur I

1. lorsque f est à valeurs positives (par définition $|f| = f$),
2. lorsque f est à valeurs négatives : en effet, $|f| = -f$ donc une primitive de $|f|$ est $-F$ où F est une primitive de f sur I. Alors

$$
\begin{aligned}
\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad &\iff \quad F \text{ admet des limites finies en } \alpha \text{ et } \beta \\
&\iff \quad -F \text{ admet des limites finies en } \alpha \text{ et } \beta \\
&\iff \quad \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = [-F]_\alpha^\beta < +\infty \\
&\iff \quad f \text{ est intégrable sur } I
\end{aligned}
$$

En résumé, on a équivalence lorsque la fonction est à valeurs réelles, **et de signe constant**.

Attention au vocabulaire utilisé :

- on parle de **fonction** intégrable sur I : pas de rédaction du genre $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est intégrable !
- on parle d'**intégrale** convergente ou divergente : pas de rédaction du genre f converge ou f diverge.