Fonctions de plusieurs variables réelles

Plan du chapitre

Définition 1.1

On appelle **norme** *sur* $\mathbb{R}^n$ *toute application* $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

1. *axiome de séparation :* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$
2. *homogénéité :* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$
3. *inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Proposition 1.2 (Inégalité triangulaire inversée)

Soit $\| \, . \, \|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|.$$

Définition 1.3

On appelle **norme euclidienne** *sur* $\mathbb{R}^n$ *l'application* $\| \, . \, \|_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*, on a*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) *est liée.*

Proposition 1.5

L'application $\| \,.\, \|_2$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$*.*

Dans tout le reste du chapitre, la seule norme considérée sur $\mathbb{R}^n$ sera la norme euclidienne. On se contentera donc de la noter $\| \,.\, \|$ à la place de $\| \,.\, \|_2$.

Définition 1.6

On appelle **distance euclidienne** *sur* $\mathbb{R}^n$ *l'application* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proposition 1.7

La distance euclidienne $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifie :*

1. *symétrie :* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = d(y, x)$
2. *séparation :* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. *inégalité triangulaire :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Proposition 1.8

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k|.$$

Plan du chapitre

Définition 1.9

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On définit :

- *la* **boule ouverte** *de centre a et de rayon r par* $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\}$,
- *la* **boule fermée** *de centre a et de rayon r par* $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leq r\}$,
- *la* **sphère** *de centre a et de rayon r par* $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| = r\}$.

Définition 1.10

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite **bornée** *s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Si A est une partie bornée non vide de E, on définit son **diamètre** *par :*

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}.$$

Proposition 1.11

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) *A est bornée,*
- ii) *il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \geq 0$ tels que $A \subset \overline{B}(a, r)$.*

Plan du chapitre

Définition 1.12

On appelle **voisinage** *d'un élément $x \in \mathbb{R}^n$ toute partie $V \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant :*

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

Définition 1.13

Une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite **ouverte** *si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

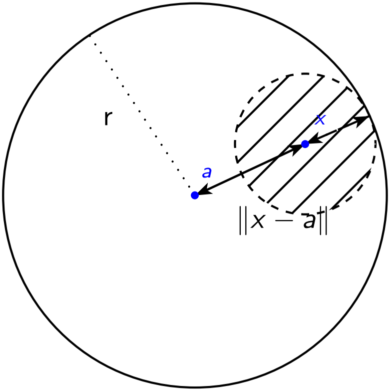

Figure – Une boule ouverte est ouverte

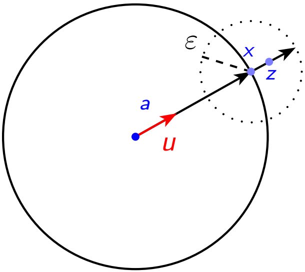

Figure – Une sphère n'est pas ouverte.

Proposition 1.14

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 1.15

Une intersection **finie** *d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.16

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors le produit cartésien $U \times V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$ (où l'on a identifié $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ avec $\mathbb{R}^{n+p}$).

Plan du chapitre

Définition 2.1

On dit qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *est* **bornée** *s'il existe* $M \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $\|u_k\| \leq M$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2

On dit qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *est* **convergente** *s'il existe* $\ell \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|u_k - \ell\| \longrightarrow 0$ *lorsque* $k \to +\infty$, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|u_k - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ *est alors unique, on l'appelle limite de la suite* $(u_k)_k$ *et on note* $\ell = \lim\limits_{k\to+\infty} u_k$ *ou* $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque : On dispose des équivalences :

$$\begin{aligned} u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad &\iff \quad u_k - \ell \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}^n} \\ &\iff \quad \|u_k - \ell\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.3

Si $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *alors* $\|u_k\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$. *Par conséquent, toute suite convergente est bornée.*

Proposition 2.4

Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *convergeant respectivement vers* ℓ *et* ℓ'. *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\lambda u_k + \mu v_k \longrightarrow \lambda\ell + \mu\ell' \quad \text{quand } k \to +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de E *est un espace vectoriel, et l'application* $(u_k)_k \longmapsto \lim\limits_{k\to+\infty} u_k$ *est linéaire.*

Proposition 2.5

Soient $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite réelle convergeant vers* λ *et* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *convergeant vers* $\ell \in \mathbb{R}^n$, *alors*

$$\lambda_k \cdot u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell.$$

Proposition 2.6

Soit $u = (u(k))_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^n$. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on peut écrire*

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \quad \text{avec } u_i(k) \in \mathbb{R} \quad \forall i \in [\![1; n]\!].$$

Les suites réelles $u_i = (u_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ *sont appelées suites coordonnées (ou composantes) de la suite vectorielle* u.
On a équivalence entre :

1. *la suite* u *converge,*
2. *les suites coordonnées* $u_1, \dots, u_n$ *convergent.*

De plus, si tel est le cas, on a
$\lim\limits_{k\to+\infty} u(k) = (\lim\limits_{k\to+\infty} u_1(k), \dots, \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k))$.

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Définition 2.7

Soient X une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que a est un **point adhérent** *à X s'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a.*

Définition 2.8

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et a un point adhérent à X. On dit que f **tend vers** *$\ell \in \mathbb{R}^p$ en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 2.9

Soient $f : X = X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, *a un point adhérent à* X_1 *et à* X_2 *et* $\ell \in \mathbb{R}^p$. *Si*

$$f(x) \underset{x \to a, x \in X_1}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \to a, x \in X_2}{\longrightarrow} \ell,$$

alors $f(x) \underset{x \to a, x \in X}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 2.10 (Caractérisation séquentielle)

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\ell \in \mathbb{R}^p$ *et a un point adhérent à* X. *On a équivalence entre*

1. $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$,
2. $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $x_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 2.11

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. *Pour tout* $x \in X$, *on peut écrire* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ *avec* $f_i(x) \in \mathbb{R}$. *On rappelle que les applications* $f_1, \ldots, f_p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont appelées applications coordonnées ou composantes de* f. *Soit* $a \in \mathbb{R}^n$ *un point adhérent à* X. *On a équivalence entre :*

- (i) f *tend vers* $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ *en* a,
- (ii) *pour tout* $i \in [\![1; p]\!]$, f_i *tend vers* ℓ_i *en* a.

Plan du chapitre

Proposition 2.12

Soient $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*. Si* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ *et* $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell'$*, alors* $(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$*.*

Proposition 2.13

Soient $\alpha : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$*. Si* $\alpha(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$ *et* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$*, alors* $(\alpha f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ell$*.*

Proposition 2.14 (Composition des limites)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$*,* $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $g : Y \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *avec* $f(X) \subset Y$*. Si* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ *et* $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$*, alors* $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$*.*

Plan du chapitre

Definition 1

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ avec X une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$, pour $X \subset \mathbb{R}$ non minorée.

Definition 2

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ avec X une partie de $\mathbb{R}^p$ non bornée. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ lorsque $\|x\| \to +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\| \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Definition 3

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, etc...

Plan du chapitre

Definition 4

On dit que $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **continue** en $a \in X$ si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, *i.e.* si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 3.1

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in X$. On a équivalence entre :

1. *f est continue en a,*
2. $\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = f(a).$

Definition 5

On dit que $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **continue** sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}^p$.

Proposition 3.2

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On peut noter $f = (f_1, \dots, f_p)$ avec $f_i : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. La fonction f est continue sur X si et seulement ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ sont continues sur X.

Plan du chapitre

Definition 6

Une application $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite **lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Proposition 3.3

Les applications lipschitziennes sont continues.

Plan du chapitre

Proposition 3.4

Soient $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *continues et* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *La fonction* $\lambda f + \mu g$ *est continue sur* X.

Proposition 3.5

Soient $\alpha : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *continues sur* X. *Le produit* $\alpha \cdot f$ *est continu sur* X.

Proposition 3.6

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $g : Y \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *vérifiant* $f(X) \subset Y$. *Si* f *et* g *sont continues (resp. sur* X *et* Y*), la composée* $g \circ f$ *est continue sur* X.

Proposition 3.7

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $U \subset X$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *Si la restriction de* f *à* U, *notée* $f_{|_U}$, *est continue sur* U, *alors* f *est continue en tout point de* U.

Plan du chapitre

Definition 7

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$. Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on définit les applications partielles

$$\begin{array}{rccc} f_{a,j} : & D_{a,j} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

où

$$D_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in D\}.$$

avec les notations abusives :

$$(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) = (t, a_2, \ldots, a_n) \text{ et}$$
$$(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, t)$$

dans les cas où $j = 1$ ou n.

Proposition 3.8

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. *Si* f *est continue en* $a \in D$, *alors l'application partielle* $f_{a,j}$ *est continue en* a_j, *pour tout* $j \in [\![1; n]\!]$.