

Fonctions de plusieurs variables réelles (Partie II)

Plan du chapitre

1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles

- Vocabulaire
- Dérivées partielles
- Dérivées directionnelles

2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

- Définition
- Existence d'un développement limité à l'ordre 1
- Lien avec les dérivées directionnelles
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1

3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

- Dérivées partielles d'ordre supérieur
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
- Théorème de Schwarz

Dans toute la suite, U désignera un ouvert de \mathbb{R}^n .

Definition 1

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **scalaire** si f est à valeurs dans \mathbb{R} , c'est-à-dire si $p = 1$. On dit que f est à **valeurs vectorielles** sinon.

Definition 2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$. Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, l'application $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée **i -ème fonction composante** (ou **i -ème fonction coordonnée**) de f .

Definition 3

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on définit l'**application partielle** $f_{a,j}$ par

$$\begin{aligned} f_{a,j} : U_{a,j} \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t &\longmapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

où $U_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \in U\}$ (la notation est abusive dans les cas $j = 1$ et $j = n$ pour lesquels il faut remplacer les expressions ci-dessus par (t, a_2, \dots, a_n) et (a_1, \dots, a_{n-1}, t) respectivement).

Remarque : Puisque U est un ouvert contenant $a = (a_1, \dots, a_n)$, pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'ensemble $U_{a,j}$ est un voisinage de a_j dans \mathbb{R} . En effet, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $|t - a_j| < r$, posons $x_t = (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$, on a

$$\begin{aligned} \|x_t - a\| &= \sqrt{(a_1 - a_1)^2 + \dots + (a_{j-1} - a_{j-1})^2 + (t - a_j)^2} \\ &\quad \sqrt{+(a_{j+1} - a_{j+1})^2 + \dots + (a_n - a_n)^2} \\ &= |t - a_j| < r \end{aligned}$$

ce qui démontre que $x_t \in B(a, r) \subset U$. Par suite, la boule ouverte $B(a_j, r)$ est incluse dans $U_{a,j}$, ce qui démontre que $U_{a,j}$ est un voisinage de a_j dans \mathbb{R} .

On peut en fait démontrer que $U_{a,j}$ est un ouvert de \mathbb{R} .

Definition 4

Soit I un ouvert non vide de \mathbb{R} , $a \in I$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$$

converge lorsque $t \rightarrow 0$ (avec $t \neq 0$). Sa limite est alors appelée **vecteur dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

Definition 5

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I . On peut alors introduire l'application

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R}^p && \text{appelée fonction dérivée de } f. \\ t &\longmapsto f'(t) \end{aligned}$$

Théorème 1.1

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ de fonctions coordonnées f_1, \dots, f_p . On a équivalence entre :

- ① f est dérivable,
- ② les fonctions f_1, \dots, f_p sont dérivables.

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_p'(t)).$$

Plan du chapitre

1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles

- Vocabulaire
- Dérivées partielles
- Dérivées directionnelles

2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

- Définition
- Existence d'un développement limité à l'ordre 1
- Lien avec les dérivées directionnelles
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1

3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

- Dérivées partielles d'ordre supérieur
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
- Théorème de Schwarz

Definition 6

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à sa j -ième variable au point a (encore appelée j -ième dérivée partielle en a) si l'application partielle $f_{a,j}$ est dérivable au point a_j .

On note alors $\partial_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ cette dérivée, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\partial_j f(a) &= f'_{a,j}(a_j) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}.\end{aligned}$$

Definition 7

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ admet une dérivée partielle par rapport à sa j -ième variable en tout point $a \in U$, l'application $\partial_j f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est appelée j -ième dérivée partielle de f .

Proposition 1.2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $f_1, \dots, f_p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ses applications coordonnées. On a équivalence entre :

- 1) f admet des dérivées partielles,
- 2) les fonctions coordonnées de f admettent des dérivées partielles.

De plus, on a alors $(\partial_i f)_k = \partial_i(f_k)$ où l'on a noté f_k et $(\partial_i f)_k$ les fonctions coordonnées de f et $\partial_i f$.

Definition 8

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables au point a , on définit la matrice **Jacobienne** de f au point a , notée $J_f(a)$, comme la matrice à p lignes et n colonnes dont les coefficients sont

$$(J_f(a))_{i,j} = \partial_j f_i(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

On remarque que $J_f(a) \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Definition 9

Toujours sous réserve d'existence des dérivées partielles de f , soit $a \in U$:

- si f est scalaire (i.e $p = 1$), on définit le **gradient** de f au point a , noté $\text{grad}f(a)$ ou $\nabla f(a)$, par

$$\text{grad}f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = {}^t J_f(a)$$

- si $n = p$ (i.e. $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$), on définit la **divergence** de f au point a par : $\text{div}f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i(a) = \text{Tr}(J_f(a))$.

- si $n = p = 3$, on définit le **rotationnel** de f au point a par

$$\text{rot}f(a) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(a) - \partial_3 f_2(a) \\ \partial_3 f_1(a) - \partial_1 f_3(a) \\ \partial_1 f_2(a) - \partial_2 f_1(a) \end{pmatrix}$$

Plan du chapitre

1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles

- Vocabulaire
- Dérivées partielles
- Dérivées directionnelles

2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

- Définition
- Existence d'un développement limité à l'ordre 1
- Lien avec les dérivées directionnelles
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1

3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

- Dérivées partielles d'ordre supérieur
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
- Théorème de Schwarz

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Puisque U est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset U$. Ainsi, pour $v \in \mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + tv)$ est définie au voisinage de 0. Lorsque $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, elle étudie les valeurs prises par f sur la droite affine $a + \text{Vect}(v)$.

Definition 10

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est **dérivable selon le vecteur** v en a (ou admet une dérivée directionnelle suivant v en a) si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. On appelle alors dérivée selon le vecteur v de f en a la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a)).$$

Remarque : Si $v = 0_{\mathbb{R}^n}$, la dérivée de f selon le vecteur v en a existe toujours et vaut $D_{0_{\mathbb{R}^n}} f(a) = 0_{\mathbb{R}^p}$. En effet,

$$\frac{1}{t}(f(a + t0_{\mathbb{R}^n}) - f(a)) = \frac{1}{t}(f(a) - f(a)) = 0_{\mathbb{R}^p} \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Proposition 1.3

Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in U$. Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa j -ième variable en a si et seulement si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_j en a .

Si c'est le cas, on a alors

$$\partial_j f(a) = D_{e_j} f(a).$$

Plan du chapitre

1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles

- Vocabulaire
- Dérivées partielles
- Dérivées directionnelles

2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

- Définition
- Existence d'un développement limité à l'ordre 1
- Lien avec les dérivées directionnelles
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1

3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

- Dérivées partielles d'ordre supérieur
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
- Théorème de Schwarz

Definition 11

On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur U . On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 2.1

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On note $f_1, \dots, f_p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées de f . Les propositions sont équivalentes :

- ❶ f est de classe \mathcal{C}^1 sur U ,
- ❷ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, la fonction f_i est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Plan du chapitre

1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles

- Vocabulaire
- Dérivées partielles
- Dérivées directionnelles

2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

- Définition
- **Existence d'un développement limité à l'ordre 1**
- Lien avec les dérivées directionnelles
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1

3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

- Dérivées partielles d'ordre supérieur
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
- Théorème de Schwarz

Théorème 2.2

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^1 et $a \in U$. Pour tout $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $a + h \in U$, on peut écrire

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + \|h\| \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction à valeurs dans \mathbb{R}^p vérifiant $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}]{} 0_{\mathbb{R}^p}$.

Corollaire 2.3

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors elle est continue sur U .

Plan du chapitre

- 1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles
 - Vocabulaire
 - Dérivées partielles
 - Dérivées directionnelles
- 2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1
 - Définition
 - Existence d'un développement limité à l'ordre 1
 - **Lien avec les dérivées directionnelles**
 - Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1
- 3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k
 - Dérivées partielles d'ordre supérieur
 - Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
 - Théorème de Schwarz

Proposition 2.4

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ et

$$D_h f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a).$$

Plan du chapitre

- 1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles
 - Vocabulaire
 - Dérivées partielles
 - Dérivées directionnelles
- 2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1
 - Définition
 - Existence d'un développement limité à l'ordre 1
 - Lien avec les dérivées directionnelles
 - Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1
- 3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k
 - Dérivées partielles d'ordre supérieur
 - Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
 - Théorème de Schwarz

Proposition 2.5

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^1 . Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Proposition 2.6

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et α sont de classe \mathcal{C}^1 sur U , il en est de même de la fonction αf .

Proposition 2.7 (Formule de dérivée en chaîne)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 (resp. sur U et V), alors la fonction $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U . De plus ses dérivées partielles vérifient :

$$\forall a \in U, \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \partial_i(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^p \partial_i f_k(a) \partial_k g(f(a))$$

où l'on a noté f_1, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f .

Remarque : Si l'on convient de noter x_1, \dots, x_n les coordonnées d'un vecteur générique $x \in \mathbb{R}^n$ et y_1, \dots, y_p celles d'un vecteur générique $y \in \mathbb{R}^p$, la formule précédente se réécrit sous la forme

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Corollaire 2.8

Soient $d \in \mathbb{N}^$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 , alors pour tout $a \in U$,*

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Plan du chapitre

1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles

- Vocabulaire
- Dérivées partielles
- Dérivées directionnelles

2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

- Définition
- Existence d'un développement limité à l'ordre 1
- Lien avec les dérivées directionnelles
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1

3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k

- Dérivées partielles d'ordre supérieur
- Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
- Théorème de Schwarz

Definition 12

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. La fonction f est appelée dérivée partielle d'ordre 0 de f . Pour $k \in \mathbb{N}$ et sous réserve d'existence, on appelle dérivées partielles d'ordre $k + 1$ de f les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f .

Definition 13

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^k sur U si les dérivées partielles de f d'ordre k existent et sont continues sur U .
On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ si f est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.1

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe \mathcal{C}^{k+1} sur U , alors f est de classe \mathcal{C}^k sur U .

Plan du chapitre

- 1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles
 - Vocabulaire
 - Dérivées partielles
 - Dérivées directionnelles
- 2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1
 - Définition
 - Existence d'un développement limité à l'ordre 1
 - Lien avec les dérivées directionnelles
 - Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1
- 3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k
 - Dérivées partielles d'ordre supérieur
 - Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
 - Théorème de Schwarz

Lemme 3.2

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On a équivalence entre :

- ❶ f est de classe \mathcal{C}^{k+1} sur U ,
- ❷ les dérivées partielles premières de f existent et sont de classe \mathcal{C}^k sur U .

Proposition 3.3

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On a équivalence entre :

- ❶ f est de classe \mathcal{C}^k sur U ,
- ❷ les fonctions coordonnées f_1, \dots, f_p de f sont de classe \mathcal{C}^k sur U .

Proposition 3.4

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^k sur U . Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe \mathcal{C}^k .

Proposition 3.5

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^k sur U . Alors le produit αf est aussi de classe \mathcal{C}^k sur U .

Théorème 3.6 (Composition)

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$ avec U, V deux ouverts tels que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe \mathcal{C}^k (resp. sur U et V), alors la composée $g \circ f$ est elle-aussi de classe \mathcal{C}^k (sur U).

Plan du chapitre

- 1 Dérivées partielles et dérivées directionnelles
 - Vocabulaire
 - Dérivées partielles
 - Dérivées directionnelles
- 2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1
 - Définition
 - Existence d'un développement limité à l'ordre 1
 - Lien avec les dérivées directionnelles
 - Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1
- 3 Fonctions de classe \mathcal{C}^k
 - Dérivées partielles d'ordre supérieur
 - Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k
 - Théorème de Schwarz

Théorème 3.7 (Théorème de Schwarz (admis))

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^2 . Alors les dérivées partielles croisées de f sont égales, c'est-à-dire que pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f) \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Corollaire 3.8

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe \mathcal{C}^k . Pour tous $i_1, \dots, i_k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, pour toute permutation $\sigma \in S_k$ (groupe des permutations de $\llbracket 1; k \rrbracket$), on a

$$\partial_{i_{\sigma(1)}}(\partial_{i_{\sigma(2)}}(\cdots(\partial_{i_{\sigma(k)}} f)\cdots)) = \partial_{i_1}(\cdots(\partial_{i_k} f)\cdots)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}.$$