Fonctions de plusieurs variables réelles (Partie II)

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Dans toute la suite, U désignera un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Definition 1

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **scalaire** si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $p = 1$. On dit que f est à **valeurs vectorielles** sinon.

Definition 2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$. Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, l'application $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée ***i*-ème fonction composante** (ou ***i*-ème fonction coordonnée**) de f.

Definition 3

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on définit l'**application partielle** $f_{a,j}$ par

$$\begin{array}{rccl} f_{a,j} : & U_{a,j} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ & t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

où $U_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in U\}$ (la notation est abusive dans les cas $j = 1$ et $j = n$ pour lesquels il faut remplacer les expressions ci-dessus par $(t, a_2, \ldots, a_n)$ et $(a_1, \ldots, a_{n-1}, t)$ respectivement).

Remarque : Puisque U est un ouvert contenant $a = (a_1, \ldots, a_n)$, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, l'ensemble $U_{a,j}$ est un voisinage de a_j dans $\mathbb{R}$.
En effet, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $|t - a_j| < r$, posons $x_t = (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|x_t - a\| & = & \sqrt{(a_1 - a_1)^2 + \cdots + (a_{j-1} - a_{j-1})^2 + (t - a_j)^2 + (a_{j+1} - a_{j+1})^2 + \cdots + (a_n - a_n)^2} \\ & = & |t - a_j| < r \end{array}$$

ce qui démontre que $x_t \in B(a, r) \subset U$. Par suite, la boule ouverte $B(a_j, r)$ est incluse dans $U_{a,j}$, ce qui démontre que $U_{a,j}$ est un voisinage de a_j dans $\mathbb{R}$.
On peut en fait démontrer que $U_{a,j}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Definition 4

Soit I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'acroissement

$$\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$$

converge lorsque $t \to 0$ (avec $t \neq 0$). Sa limite est alors appelée **vecteur dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

Definition 5

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I. On peut alors introduire l'application

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array}$$ appelée fonction dérivée de f.

Théorème 1.1

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *de fonctions coordonnées* $f_1, \ldots, f_p$*. On a équivalence entre :*

- *i)* f *est dérivable,*
- *ii)* *les fonctions* $f_1, \ldots, f_p$ *sont dérivables.*

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_p'(t)).$$

Plan du chapitre

Definition 6

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $j \in [\![1; n]\!]$. On dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à sa j-ième variable au point a (encore appelée j-ième dérivée partielle en a) si l'application partielle $f_{a,j}$ est dérivable au point a_j.

On note alors $\partial_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ cette dérivée, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \partial_j f(a) &= f'_{a,j}(a_j) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t}. \end{aligned}$$

Definition 7

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ admet une dérivée partielle par rapport à sa j-ième variable en tout point $a \in U$, l'application $\partial_j f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est appelée j-ième dérivée partielle de f.

Proposition 1.2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $f_1, \ldots, f_p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ses applications coordonnées. On a équivalence entre :

- i) *f admet des dérivées partielles,*
- ii) *les fonctions coordonnées de f admettent des dérivées partielles.*

De plus, on a alors $(\partial_i f)_k = \partial_i(f_k)$ où l'on a noté f_k et $(\partial_i f)_k$ les fonctions coordonnées de f et $\partial_i f$.

Definition 8

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables au point a, on définit la matrice **Jacobienne** de f au point a, notée $J_f(a)$, comme la matrice à p lignes et n colonnes dont les coefficients sont

$$(J_f(a))_{i,j} = \partial_j f_i(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad \forall i \in [\![1; p]\!], \forall j \in [\![1; n]\!].$$

On remarque que $J_f(a) \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Definition 9

Toujours sous réserve d'existence des dérivées partielles de f, soit $a \in U$:

- si f est scalaire (*i.e* $p = 1$), on définit le **gradient** de f au point a, noté $\mathrm{grad} f(a)$ ou $\nabla f(a)$, par

$$\mathrm{grad} f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = {}^t J_f(a)$$

- si $n = p$ (*i.e.* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$), on définit la **divergence** de f au point a par : $\quad \mathrm{div} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i(a) = \mathrm{Tr}(J_f(a))$.

- si $n = p = 3$, on définit le **rotationnel** de f au point a par

$$\mathrm{rot} f(a) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(a) - \partial_3 f_2(a) \\ \partial_3 f_1(a) - \partial_1 f_3(a) \\ \partial_1 f_2(a) - \partial_2 f_1(a) \end{pmatrix}$$

Plan du chapitre

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Puisque U est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(a, \rho) \subset U$. Ainsi, pour $v \in \mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $t \in \mathbb{R} \longmapsto f(a + tv)$ est définie au voisinage de 0. Lorsque $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, elle étudie les valeurs prises par f sur la droite affine $a + \mathrm{Vect}(v)$.

Definition 10

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est **dérivable selon le vecteur** v en a (ou admet une dérivée directionnelle suivant v en a) si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \longmapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. On appelle alors dérivée selon le vecteur v de f en a la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a)).$$

Remarque : Si $v = 0_{\mathbb{R}^n}$, la dérivée de f selon le vecteur v en a existe toujours et vaut $D_{0_{\mathbb{R}^n}} f(a) = 0_{\mathbb{R}^p}$. En effet,

$$\frac{1}{t}(f(a + t0_{\mathbb{R}^n}) - f(a)) = \frac{1}{t}(f(a) - f(a)) = 0_{\mathbb{R}^p} \underset{t \overset{\neq}{\to} 0}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Proposition 1.3

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in U$. Soit $j \in [\![1; n]\!]$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa j-ième variable en a si et seulement si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_j en a.
Si c'est le cas, on a alors

$$\partial_j f(a) = D_{e_j} f(a).$$

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Definition 11

On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur U. On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 2.1

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On note $f_1, \dots f_p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées de f. Les propositions sont équivalentes :

- i) *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U,*
- ii) *pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, la fonction f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*

Plan du chapitre

Théorème 2.2

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* $a \in U$*. Pour tout* $h = (h_1, \ldots, h_n)$ *tel que* $a + h \in U$*, on peut écrire*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + \|h\| \varepsilon(h)$$

où ε *est une fonction à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$ *vérifiant* $\varepsilon(h) \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}^p}$*.*

Corollaire 2.3

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U*, alors elle est continue sur* U*.*

Plan du chapitre

Proposition 2.4

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ et

$$D_h f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a).$$

Plan du chapitre

Proposition 2.5

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Proposition 2.6

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et α sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, il en est de même de la fonction αf.

Proposition 2.7 (Formule de dérivée en chaîne)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. sur U et V), alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. De plus ses dérivées partielles vérifient :

$$\forall a \in U, \quad \forall i \in [\![1; n]\!], \quad \partial_i(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_i f_k(a) \partial_k g(f(a))$$

où l'on a noté $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f.

Remarque : Si l'on convient de noter $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un vecteur générique $x \in \mathbb{R}^n$ et $y_1, \ldots, y_p$ celles d'un vecteur générique $y \in \mathbb{R}^p$, la formule précédente se récrit sous la forme

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \quad \forall i \in [\![1; n]\!].$$

Corollaire 2.8

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $a \in U$,

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Plan du chapitre

Definition 12

On appelle $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ vers un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ toute application bijective $f : U \longrightarrow V$ telle que f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 2.9

La bijection réciproque d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme en est un.

Proposition 2.10

La composée de deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes en est un.

Proposition 2.11

Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert V de $\mathbb{R}^p$, alors $n = p$, pour tout $a \in U$, la Jacobienne de f en a, $J_f(a)$, est inversible et

$$(J_f(a))^{-1} = J_{f^{-1}}(f(a)).$$

Definition 13

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. On appelle Jacobien de f en a le déterminant de la matrice Jacobienne de f en a.

Théorème 2.12 (Théorème d'inversion globale (admis))

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur U dont le Jacobien ne s'annule en aucun point de U. Alors $V = f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur V.

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Definition 14

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. La fonction f est appelée dérivée partielle d'ordre 0 de f. Pour $k \in \mathbb{N}$ et sous réserve d'existence, on appelle dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f.

Definition 15

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si les dérivées partielles de f d'ordre k existent et sont continues sur U.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 3.1

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Plan du chapitre

Lemme 3.2

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *et* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. *On a équivalence entre :*

- *i)* f *est de classe* $\mathcal{C}^{k+1}$ *sur* U,
- *ii)* *les dérivées partielles premières de* f *existent et sont de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* U.

Proposition 3.3

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. *On a équivalence entre :*

- *i)* f *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* U,
- *ii)* *les fonctions coordonnées* $f_1, \ldots, f_p$ *de* f *sont de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* U.

Proposition 3.4

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 3.5

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Alors le produit αf est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Théorème 3.6 (Composition)

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ avec U, V deux ouverts tels que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. sur U et V), alors la composée $g \circ f$ est elle-aussi de classe $\mathcal{C}^k$ (sur U).

Plan du chapitre

Théorème 3.7 (Théorème de Schwarz (admis))

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors les dérivées partielles croisées de f sont égales, c'est-à-dire que pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$,

$$\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f) \quad i.e. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Corollaire 3.8

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$. Pour tous $i_1, \ldots, i_k \in [\![1; n]\!]$, pour toute permutation $\sigma \in S_k$ (groupe des permutations de $[\![1; k]\!]$), on a

$$\partial_{i_{\sigma(1)}}(\partial_{i_{\sigma(2)}}(\cdots(\partial_{i_{\sigma(k)}} f)\cdots)) = \partial_{i_1}(\cdots(\partial_{i_k} f)\cdots)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(1)} \cdots \partial x_{\sigma(k)}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}.$$