

# Fonctions de plusieurs variables réelles

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Définition 1.1

On appelle **norme** sur  $\mathbb{R}^n$  toute application  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

- 1 axiome de séparation :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, N(x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$
- 2 homogénéité :  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- 3 inégalité triangulaire :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

### Proposition 1.2 (Inégalité triangulaire inversée)

Soit  $\| \cdot \|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|.$$

### Définition 1.3

On appelle **norme euclidienne** sur  $\mathbb{R}^n$  l'application  $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

### Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille  $(x, y)$  est liée.

### Proposition 1.7

La distance euclidienne  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie :

- ① *symétrie* :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = d(y, x)$
- ② *séparation* :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
- ③ *inégalité triangulaire* :  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

### Proposition 1.8

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_k|.$$

### Proposition 1.5

L'application  $\|\cdot\|_2$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .

Dans tout le reste du chapitre, la seule norme considérée sur  $\mathbb{R}^n$  sera la norme euclidienne. On se contentera donc de la noter  $\|\cdot\|$  à la place de  $\|\cdot\|_2$ .

### Définition 1.6

On appelle **distance euclidienne** sur  $\mathbb{R}^n$  l'application  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Définition 1.9

Soient  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ . On définit :

- la **boule ouverte** de centre  $a$  et de rayon  $r$  par  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ ,
- la **boule fermée** de centre  $a$  et de rayon  $r$  par  $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ ,
- la **sphère** de centre  $a$  et de rayon  $r$  par  $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}$ .

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Définition 1.10

Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite **bornée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Si  $A$  est une partie bornée non vide de  $E$ , on définit son **diamètre** par :

$$\text{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}.$$

### Proposition 1.11

Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1  $A$  est bornée,
- 2 il existe  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $r \geq 0$  tels que  $A \subset \overline{B}(a, r)$ .

### Définition 1.12

On appelle **voisinage** d'un élément  $x \in \mathbb{R}^n$  toute partie  $V \subset \mathbb{R}^n$  vérifiant :

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

### Définition 1.13

Une partie  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite **ouverte** si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

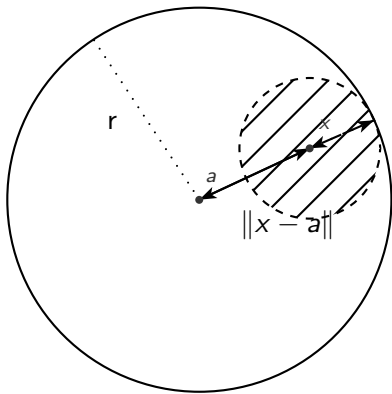


Figure – Une boule ouverte est ouverte

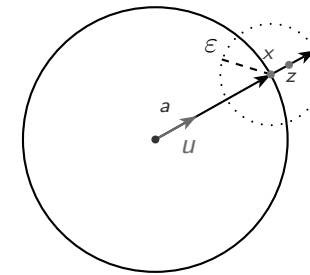


Figure – Une sphère n'est pas ouverte.

Proposition 1.14

*Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.15

*Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.16

*Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $V$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , alors le produit cartésien  $U \times V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+p}$  (où l'on a identifié  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  avec  $\mathbb{R}^{n+p}$ ).*

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

# Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

**Remarque :** On dispose des équivalences :

$$\begin{aligned} u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell &\iff u_k - \ell \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathbb{R}^n} \\ &\iff \|u_k - \ell\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

## Proposition 2.3

Si  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell$  alors  $\|u_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|\ell\|$ . Par conséquent, toute suite convergente est bornée.

## Définition 2.1

On dit qu'une suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  est **bornée** s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\|u_k\| \leq M$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

## Définition 2.2

On dit qu'une suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  est **convergente** s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|u_k - \ell\| \rightarrow 0$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, \|u_k - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément  $\ell$  est alors unique, on l'appelle limite de la suite  $(u_k)_k$  et on note  $\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$  ou  $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

## Proposition 2.4

Soient  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  deux suites d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  convergeant respectivement vers  $\ell$  et  $\ell'$ . Pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lambda u_k + \mu v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \lambda \ell + \mu \ell' \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de  $E$  est un espace vectoriel, et l'application  $(u_k)_k \mapsto \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$  est linéaire.

## Proposition 2.5

Soient  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  une suite réelle convergeant vers  $\lambda$  et  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^n$  convergeant vers  $\ell \in \mathbb{R}^n$ , alors

$$\lambda_k \cdot u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \lambda \cdot \ell.$$

### Proposition 2.6

Soit  $u = (u(k))_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on peut écrire

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \quad \text{avec } u_i(k) \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Les suites réelles  $u_i = (u_i(k))_{k \in \mathbb{N}}$  sont appelées suites coordonnées (ou composantes) de la suite vectorielle  $u$ .

On a équivalence entre :

- ① la suite  $u$  converge,
- ② les suites coordonnées  $u_1, \dots, u_n$  convergent.

De plus, si tel est le cas, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(k) = \left( \lim_{k \rightarrow +\infty} u_1(k), \dots, \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) \right).$$

## Plan du chapitre

- ① Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- ② Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- ③ Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

## Plan du chapitre

- ① Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- ② Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- ③ Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Définition 2.7

Soient  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in \mathbb{R}^n$ . On dit que  $a$  est un **point adhérent** à  $X$  s'il existe une suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $a$ .

### Définition 2.8

Soient  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $a$  un point adhérent à  $X$ . On dit que  $f$  **tend vers**  $\ell \in \mathbb{R}^p$  en  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément  $\ell$  est alors unique, et on note  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ou  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

### Proposition 2.9

Soient  $f : X = X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $a$  un point adhérent à  $X_1$  et à  $X_2$  et  $\ell \in \mathbb{R}^p$ . Si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in X_1} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in X_2} \ell,$$

alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a, x \in X} \ell$ .

### Théorème 2.10 (Caractérisation séquentielle)

Soient  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\ell \in \mathbb{R}^p$  et  $a$  un point adhérent à  $X$ . On a équivalence entre

- ①  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ,
- ②  $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \ell$ .

## Plan du chapitre

- ① Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- ② Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- ③ Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Proposition 2.11

Soit  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Pour tout  $x \in X$ , on peut écrire  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$  avec  $f_i(x) \in \mathbb{R}$ . On rappelle que les applications  $f_1, \dots, f_p : X \rightarrow \mathbb{R}$  sont appelées applications coordonnées ou composantes de  $f$ . Soit  $a \in \mathbb{R}^n$  un point adhérent à  $X$ . On a équivalence entre :

- ①  $f$  tend vers  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  en  $a$ ,
- ② pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $f_i$  tend vers  $\ell_i$  en  $a$ .

### Proposition 2.12

Soient  $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ , alors  $(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell + \mu \ell'$ .

### Proposition 2.13

Soient  $\alpha : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Si  $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \in \mathbb{R}$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ , alors  $(\alpha f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$ .

### Proposition 2.14 (Composition des limites)

Soient  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : Y \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  avec  $f(X) \subset Y$ . Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$  et  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$ , alors  $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ .

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Definition 1

Soit  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  avec  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  non majorée. On dit que  $f$  tend vers  $\ell \in \mathbb{R}^p$  en  $+\infty$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ . On définit de manière analogue  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ , pour  $X \subset \mathbb{R}$  non minorée.

### Definition 2

Soit  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  avec  $X$  une partie de  $\mathbb{R}^p$  non bornée. On dit que  $f$  tend vers  $\ell \in \mathbb{R}^p$  lorsque  $\|x\| \rightarrow +\infty$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, \|x\| \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors  $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \ell$ .

### Definition 3

Soit  $f : X \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  et  $a$  un point adhérent à  $X$ . On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$  si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ . On définit de manière analogue

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty, f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ etc...}$$

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles



## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Definition 4

On dit que  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est **continu** en  $a \in X$  si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$ , i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

### Théorème 3.1

Soient  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $a \in X$ . On a équivalence entre :

- 1  $f$  est continue en  $a$ ,
- 2  $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f(a)$ .

### Definition 5

On dit que  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est **continu** sur  $X$  si  $f$  est continue en tout point  $a \in X$ . On note  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^p)$  l'ensemble des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}^p$ .

### Proposition 3.2

Soit  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . On peut noter  $f = (f_1, \dots, f_p)$  avec  $f_i : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ . La fonction  $f$  est continue sur  $X$  si et seulement ses fonctions coordonnées  $f_1, \dots, f_p$  sont continues sur  $X$ .

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Definition 6

Une application  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  est dite **lipschitzienne** s'il existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

### Proposition 3.3

*Les applications lipschitziennes sont continues.*

### Proposition 3.4

Soient  $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  continues et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . La fonction  $\lambda f + \mu g$  est continue sur  $X$ .

### Proposition 3.5

Soient  $\alpha : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  continues sur  $X$ . Le produit  $\alpha \cdot f$  est continu sur  $X$ .

### Proposition 3.6

Soient  $d \in \mathbb{N}^*$ ,  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $g : Y \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  vérifiant  $f(X) \subset Y$ . Si  $f$  et  $g$  sont continues (resp. sur  $X$  et  $Y$ ), la composée  $g \circ f$  est continue sur  $X$ .

### Proposition 3.7

Soit  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  et  $U \subset X$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si la restriction de  $f$  à  $U$ , notée  $f|_U$ , est continue sur  $U$ , alors  $f$  est continue en tout point de  $U$ .

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

## Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur  $\mathbb{R}^n$  :
  - Norme euclidienne
  - Boules et sphères
  - Parties ouvertes
- 2 Limites
  - Cas des suites :
  - Cas des fonctions :
    - Définitions et propriétés
    - Opérations sur les limites
    - Extension "à l'infini"
- 3 Continuité
  - Définition et premiers exemples
  - Fonctions lipschitziennes
  - Opérations sur les fonctions continues
  - Applications partielles

### Definition 7

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Soit  $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , on définit les applications partielles

$$\begin{aligned} f_{a,j} : D_{a,j} &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t &\longmapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

où

$$D_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \in D\}.$$

avec les notations abusives :

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) &= (t, a_2, \dots, a_n) \text{ et} \\ (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) &= (a_1, \dots, a_{n-1}, t) \end{aligned}$$

dans les cas où  $j = 1$  ou  $n$ .

### Proposition 3.8

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Si  $f$  est continue en  $a \in D$ , alors l'application partielle  $f_{a,j}$  est continue en  $a_j$ , pour tout  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .