

Continuité des fonctions vectorielles

Plan du chapitre

1 Limites

● Convergences

- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Dans tout le chapitre, E et F désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) par $\| \cdot \|_E$ et $\| \cdot \|_F$. Les notions qui vont suivre sont invariantes par passage à une norme équivalente. En particulier, elles ne dépendent pas de la norme lorsque les espaces sont de dimensions finies.

Définition 1.1

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et a un point adhérent à X . On dit que f **tend vers** $\ell \in F$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Théorème 1.2 (Caractérisation séquentielle)

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$, $\ell \in F$ et a un point adhérent à X . On a équivalence entre

- ❶ $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$,
- ❷ $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- **Opérations sur les limites**
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Proposition 1.3

Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell + \mu \ell'$.

Preuve : Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a . On sait que $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$. Par opération sur les suites vectorielles convergentes, on en déduit que $(\lambda f + \mu g)(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell + \mu \ell'$. Ceci étant valable pour toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ convergent vers a , la caractérisation séquentielle des limites entraîne que $\lambda f + \mu g$ tend vers $\lambda \ell + \mu \ell'$ en a .

Proposition 1.4

Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$. Si $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$.

Proposition 1.5 (Composition des limites)

Soient G un \mathbb{K} -espace vectoriel normé, $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- **Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie**
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Soit F un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Considérons $f : X \subset E \rightarrow F$. Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{j=1}^p f_j(x)e_j \quad \text{avec } f_j(x) \in \mathbb{K} \quad \forall j \in \llbracket 1; p \rrbracket.$$

Définition 1.6

Les applications scalaires f_1, \dots, f_p sont appelées **fonctions coordonnées (ou composantes)** de f relatives à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Proposition 1.7

Soit a un point adhérent à X . On a équivalence entre :

- ❶ f tend vers $\ell = \sum_{j=1}^p \ell_j e_j$ en a ,
- ❷ pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, f_j tend vers ℓ_j en a .

Remarque : En cas de convergence, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{j=1}^p \lim_{x \rightarrow a} f_j(x)e_j$.

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- **Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit**
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Soient F_1, \dots, F_p des espaces vectoriels normés respectivement par N_1, \dots, N_p et $F = F_1 \times \dots \times F_p$ l'espace vectoriel normé produit muni de la norme infinie :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in F, \quad \|x\| = \max\{N_i(x_i) \mid i \in \llbracket 1; p \rrbracket\}.$$

Considérons $f : X \subset E \longrightarrow F$. Pour tout $x \in F$, on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ avec $f_i(x) \in F_i$. Les applications f_1, \dots, f_p sont appelées applications coordonnées ou composantes de f .

Proposition 1.8

Soit $a \in E$ un point adhérent à X . On a équivalence entre :

- ① *f tend vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ en a ,*
- ② *pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, f_i tend vers ℓ_i en a .*

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- **Extension “à l’infini”**

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Définition 1.9

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ avec X une partie de \mathbb{R} non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Définition 1.10

Soit $f : X \subset E \rightarrow F$ avec X une partie de E non bornée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ lorsque $\|x\|_E \rightarrow +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_E \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{\|x\|_E \rightarrow +\infty} \ell$.

Définition 1.11

Soit $f : X \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X . On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- **Définitions et exemples**
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Définition 2.1

On dit que $f : X \subset E \rightarrow F$ est **continue** en $a \in X$ si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$, i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.2

Soient $f : X \subset E \rightarrow F$ et $a \in X$. On a équivalence entre :

- ① f est continue en a ,
- ② $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition 2.3

On dit que $f : X \subset E \rightarrow F$ est **continue** sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F .

Proposition 2.4

Soit $f : X \subset E \rightarrow F$ et $U \subset X$ un ouvert de E . Si la restriction de f à U , notée $f|_U$, est continue sur U , alors f est continue en tout point de U .

Définition 2.5

Une application $f : X \subset E \rightarrow F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Proposition 2.6

Les applications lipschitziennes sont continues.

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- Définitions et exemples
- **Opérations sur les fonctions continues**
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Proposition 2.7

Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur X .

Proposition 2.8

Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$ continues sur X . Le produit $\alpha \cdot f$ est continu sur X .

Proposition 2.9

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ vérifiant $f(X) \subset Y$. Si f et g sont continues, la composée $g \circ f$ est continue sur X .

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- **Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit**

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Proposition 2.10

Si F est de dimension finie, alors $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Proposition 2.11

Soit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ un espace normé produit, et $f : X \subset E \longrightarrow F$. On peut noter $f = (f_1, \dots, f_p)$ avec $f_i : X \subset E \longrightarrow F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. La fonction f est continue sur X si et seulement si ses composantes f_i le sont.

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- **Autres caractérisations équivalentes de la continuité**
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Théorème 3.1

Soit $f : E \longrightarrow F$. On a équivalence entre :

- ❶ f est continue sur E ,
- ❷ l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E ,
- ❸ l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E .

Remarque : Attention, le résultat est faux en terme d'image directe.

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension "à l'infini"

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Théorème 3.2

Soient $K \subset E$ un compact et $f : K \longrightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F .

En d'autres termes, l'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Corollaire 3.3

Soit $f : K \subset E \longrightarrow F$. Si K est une partie compacte de E et f continue, alors f est bornée.

Théorème 3.4 (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : K \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue où K est un compact non vide de E . Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet un minimum et un maximum).

Plan du chapitre

1 Limites

- Convergences
- Opérations sur les limites
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie
- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit
- Extension “à l’infini”

2 Continuité

- Définitions et exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit

3 Continuité et topologie

- Autres caractérisations équivalentes de la continuité
- Continuité et compacité

4 Continuité des applications linéaires

Théorème 4.1

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est continue,
- (ii) u est continue en 0_E ,
- (iii) $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$,
- (iv) u est bornée sur la boule unité fermée,
- (v) u est bornée sur la sphère unité,
- (vi) u est lipschitzienne,

Norme subordonnée d'une application linéaire continue :

Définition 4.2

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ continue. On définit la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ de u par l'une des trois caractérisations équivalentes :

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \\ &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E, x \neq 0_E\right\}.\end{aligned}$$

Proposition 4.3

La norme subordonnée définit une norme sur le \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F) = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u \text{ continue}\}$.

Théorème 4.4

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.