

Espaces vectoriels normés

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme

Plan du chapitre

1 Normes

• Définitions

- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition 1.1

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- ❶ *axiome de séparation* : $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E$
- ❷ *homogénéité* : $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- ❸ *inégalité triangulaire* : $\forall x, y \in E, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Remarque : Les normes sont souvent notées $N(\cdot)$, $\|\cdot\|$, ou $|\cdot|$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme considérée, on note parfois simplement E l'espace vectoriel normé.

Proposition 1.2 (Inégalité triangulaire inversée)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Définition 1.3

Un vecteur x d'un espace normé E est dit **unitaire** si $\|x\| = 1$.

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Proposition 1.5

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_k|.$$

Les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ (norme euclidienne) et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{K}^n .

Remarque : Plus généralement, pour $p \in [1; +\infty[$, on peut montrer que l'application $\|\cdot\|_p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

définit une norme sur \mathbb{K}^n . De plus, on a

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p.$$

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- **Distance associée**
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur E .

Définition 1.6

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé. On appelle **distance associée** à la norme $\| \cdot \|$ sur E l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\|. \end{aligned}$$

Proposition 1.7

La distance d associée à une norme $\| \cdot \|$ sur E vérifie :

- ❶ $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$ [symétrie]
- ❷ $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$ [séparation]
- ❸ $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ [inégalité triangulaire].

Définition 1.8

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance de x à une partie non vide A de E la borne inférieure

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Remarque : Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$ mais la réciproque est fausse.

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- **Boules**
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Définition 1.9

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit :

- la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par
$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\},$$
- la **boule fermée** de centre a et de rayon r par
$$\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\},$$
- la **sphère** de centre a et de rayon r par
$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

Remarque : On a $\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$ (union disjointe).

Définition 1.10

Les boules de centre 0_E et de rayon 1 sont appelées **boules unités**.

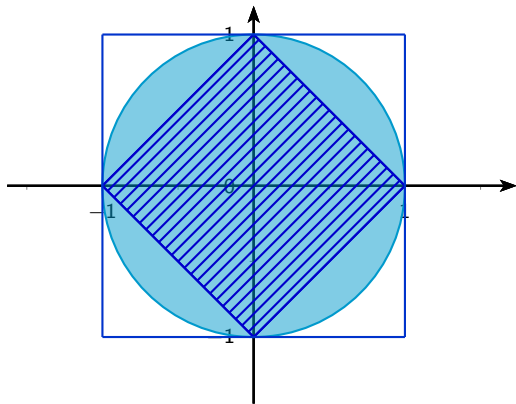


Figure – Boules unité de \mathbb{R}^2 pour les normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_1$.

Remarque : On peut voir que $B(a, r) = a + rB(0_E, 1)$ et $\overline{B}(a, r) = a + r\overline{B}(0_E, 1)$.

Proposition 1.11

Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie **convexe**, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in B, \quad \forall \theta \in [0; 1], \quad (1 - \theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère (de rayon $r > 0$) n'est pas convexe.

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- **Caractère borné**

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Définition 1.12

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Remarque : Une partie est bornée si et seulement elle est contenue dans une boule fermée de centre 0_E , cela équivaut au fait d'être contenue dans une boule fermée $\overline{B}(a, r)$ pour un certain $a \in E$.

Définition 1.13

Si A est une partie bornée non vide de E , on définit son **diamètre** par :

$$\text{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}.$$

Soit X un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé.

Définition 1.14

On dit qu'une fonction vectorielle $f : X \longrightarrow E$ est **bornée** lorsque son image l'est, i.e.

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Proposition 1.15

Soient $f, g : X \longrightarrow E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont bornées, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

Corollaire 1.16

L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(X, E)$ des fonctions de X dans E .

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Proposition 2.1

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme.

Remarque : On peut ainsi construire des normes sur un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ associées aux normes $\| \cdot \|_p$ que l'on a vues sur \mathbb{K}^n .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ où

$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$N_p(x) = \|(x_1, \dots, x_n)\|_p.$$

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- **Norme de la convergence uniforme**
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Soient X un ensemble non vide et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle que l'on note $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E .

Proposition 2.2

Pour toute fonction $f : X \rightarrow E$ bornée, on définit

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

L'application $\|\cdot\|_{\infty}$ définit une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.

Autres exemples de dimension infinie à connaître :

- Soit E le \mathbb{K} -espace vectoriel des séries numériques absolument convergentes. Les applications suivantes sont des normes sur E . Pour $u = \sum u_n$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup\{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Soient $a < b$ deux réels et $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de $[a; b]$ dans \mathbb{K} . Cet espace est inclus dans l'ensemble des fonctions bornées de $[a; b]$ dans \mathbb{K} . Les applications suivantes sont des normes sur E :

$$\|\cdot\|_\infty : f \longmapsto \sup_{t \in [a; b]} |f(t)|, \quad \|\cdot\|_1 : f \longmapsto \int_a^b |f(t)| \, dt$$

$$\text{et} \quad \|\cdot\|_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \, dt}.$$

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- **Produit d'espaces vectoriels normés**

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Proposition 2.3

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces normés et $E = E_1 \times \dots \times E_p$.
Les applications suivantes définies pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^p N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p N_k(x_k)^2}$$

et $\|x\|_\infty = \max\{N_k(x_k) \mid k \in \llbracket 1; p \rrbracket\}$

définissent des normes sur l'espace produit E .

Remarque : Si rien n'est précisé, on munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Définition 2.4

L'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est appelé **espace normé produit** des espaces normés $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$.

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- **Comparaison de normes**
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Définition 3.1

Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont dites **équivalentes** si

$$\exists C_1, C_2 > 0, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Remarque : Puisque C_1 et C_2 sont **strictement positifs**, on a aussi,

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{C_2} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{C_1} N_2(x)$$

donc les places de N_1 et N_2 peuvent être échangées dans la définition de deux normes équivalentes.

Théorème 3.2 (Équivalence des normes en dimension finie (admis))

Sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, les normes sont deux à deux équivalentes.

Remarque : Attention, ce résultat est faux en dimension infinie !

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- **Encadrement des boules**
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

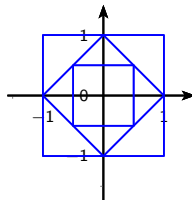
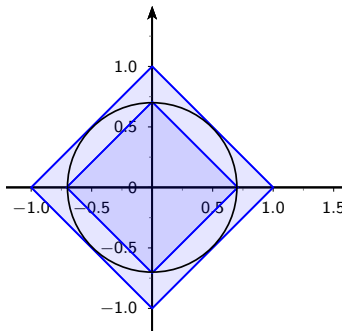
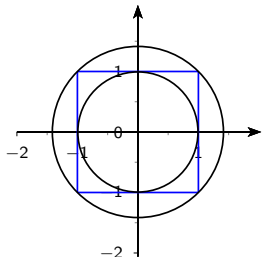
4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Proposition 3.3

Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E alors toute boule de centre a pour l'une des normes est incluse et contient des boules de même centre a (mais de rayons différents) pour l'autre norme.

Dans \mathbb{R}^2 : $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2}\|\cdot\|_\infty$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$, et $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq 2\|\cdot\|_\infty$



Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2

Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- **Notion invariante par passage à une norme équivalente**

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Définition 3.4

On dit qu'une notion est invariante par passage à une norme équivalente si, lorsqu'elle est vérifiée dans un espace normé (E, N_1) , elle l'est encore dans l'espace normé (E, N_2) quand N_2 est équivalente à N_1 .

Remarque : Lorsque deux normes ne sont pas équivalentes, certaines propriétés peuvent être vraies pour une norme sans l'être pour l'autre.

Plan du chapitre

1 Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3 Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- **Convergence**
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Dans toute cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé.

Définition 4.1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 4.2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **convergente** s'il existe $\ell \in E$ tel que $\|u_n - \ell\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de la suite $(u_n)_n$ et on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

On dit que la suite est **divergente** dans le cas contraire.

Remarque : La convergence d'une suite dans l'espace vectoriel normé E est par définition relative à la norme $\| \cdot \|$ sur E . Elle n'est pas en général satisfaite pour une autre norme. En cas d'ambiguïté sur la norme choisie sur E , on parlera de convergence de la suite pour $\| \cdot \|$ et on notera

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\| \cdot \|} \ell.$$

Remarque : On dispose des équivalences :

$$\begin{aligned} u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell &\iff u_n - \ell \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0_E \\ &\iff \|u_n - \ell\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- **Opérations**
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Proposition 4.3

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ alors $\|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|\ell\|$. Par conséquent, toute suite convergente est bornée.

Preuve : D'après l'inégalité triangulaire inversée, on obtient

$$0 \leq \| \|u_n\| - \|\ell\| \| \leq \|u_n - \ell\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

d'où le résultat par théorème des gendarmes. On utilise ensuite le fait qu'une suite réelle convergente est bornée.

Proposition 4.4

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E convergent respectivement vers ℓ et ℓ' . Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda u_n + \mu v_n \longrightarrow \lambda \ell + \mu \ell' \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de E est un espace vectoriel, et l'application $(u_n)_n \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est linéaire.

Preuve : On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \|(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda \ell + \mu \ell')\| &= \|\lambda(u_n - \ell) + \mu(v_n - \ell')\| \\ &\leq |\lambda| \|u_n - \ell\| + |\mu| \|v_n - \ell'\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Proposition 4.5

Soient $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique convergant vers λ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergant vers $\ell \in E$, alors

$$\lambda_n \cdot u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \cdot \ell.$$

Preuve : Sous les mêmes notations, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda_n \cdot u_n - \lambda \cdot \ell\| &= \|\lambda_n \cdot u_n - \lambda_n \cdot \ell + \lambda_n \cdot \ell - \lambda \cdot \ell\| \\ &\leq |\lambda_n| \|u_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda| \|\ell\| \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

puisque la suite $(\lambda_n)_n$ est convergente donc bornée.

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- **Effet d'un changement de norme**
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Proposition 4.6

Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes, et celles-ci ont les mêmes limites pour les deux normes. En d'autres termes, si N et N' sont équivalentes, pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de E , on a l'équivalence :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} \ell \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N'} \ell.$$

Remarque : Attention, si N_1 et N_2 sont deux normes sur E non équivalentes, il se peut qu'une suite converge pour une norme et diverge pour l'autre, voire qu'elle converge pour ces deux normes mais vers des limites différentes !

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- **Convergence en dimension finie**
- Convergence dans un espace produit

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$u(n) = u_1(n)e_1 + \dots + u_p(n)e_p.$$

Définition 4.7

Les suites scalaires $u_k = (u_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelées **suites coordonnées (ou composantes)** de la suite vectorielle u dans la base e .

Proposition 4.8

On a équivalence entre :

- ① la suite u converge,
- ② les suites coordonnées u_1, \dots, u_p convergent.

De plus, si tel est le cas, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_1(n) \right) e_1 + \dots + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_p(n) \right) e_p.$$

Plan du chapitre

1

Normes

- Définitions
- Normes usuelles sur \mathbb{K}^n
- Distance associée
- Boules
- Caractère borné

2 Espaces vectoriels normés usuels

- Norme sur un espace vectoriel de dimension finie
- Norme de la convergence uniforme
- Produit d'espaces vectoriels normés

3

Équivalence de normes

- Comparaison de normes
- Encadrement des boules
- Notion invariante par passage à une norme équivalente

4

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

- Convergence
- Opérations
- Effet d'un changement de norme
- Convergence en dimension finie
- Convergence dans un espace produit

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés, et $E = E_1 \times \dots \times E_p$. On a vu que l'on peut munir E des trois normes suivantes : pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^p N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p N_k(x_k)^2}$$

et $\|x\|_\infty = \max\{N_k(x_k) \mid k \in \llbracket 1; p \rrbracket\}$.

Ces trois normes sont deux à deux équivalentes.

Soit $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u(n) = (u_1(n), \dots, u_p(n))$. Les suites vectorielles $u_k = (u_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées de la suite u .

Proposition 4.9

On a équivalence entre :

- ❶ la suite $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (pour la norme produit),
- ❷ les suites coordonnées (ou composantes) $u_k = (u_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent (respectivement pour N_k).

Si tel est le cas, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_1(n), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_p(n) \right).$$