Topologie des espaces vectoriels normés

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Dans toute la suite, $(E, \| \,.\, \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les notions qui suivent ne seront pas modifiées lorsqu'on passe d'une norme à une norme équivalente. En particulier, si l'espace E est de dimension finie, elles ne dépendent pas de la norme choisie.

Définition 1.1

On appelle **voisinage** *d'un élément $x \in E$ toute partie $V \subset E$ vérifiant :*

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

Définition 1.2

Une partie $\mathcal{U}$ de E est dite **ouverte** *si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.

Proposition 1.3

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 1.4

Une intersection **finie** *d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.5

Si $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_p$ *sont des ouverts des espaces normés* $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ *alors* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_p$ *est un ouvert de l'espace normé produit* $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ *muni de la norme produit.*

Plan du chapitre

Définition 1.6

Une partie F de E est dite **fermée** *si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E.*

Remarque : Pour une partie $X \subset E$, la notation probabiliste $\overline{X}$ du complémentaire est à proscrire : elle est utilisée pour une autre notion en topologie, l'adhérence, que l'on verra dans la suite. On notera donc X^c s'il n'y a pas de confusion possible sur l'espace normé E, ou $E \backslash X$.

Proposition 1.7

Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E.

Proposition 1.8

Une union **finie** *de fermés de E est un fermé de E.*

Proposition 1.9 (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ appartient à F, ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in F.$$

Remarque : Attention, cela ne signifie pas que dans un fermé toutes les suites convergent !

Proposition 1.10

Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des fermés des espaces normés $E_1, \ldots, E_p$ alors $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ pour la norme produit.

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Définition 2.1

Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** *à une partie $X \subset E$ si X est un voisinage de a, i.e. $\exists r > 0,\ B(a, r) \subset X$.*

L'intérieur de X, noté $\overset{\circ}{X}$, est l'ensemble de tous les points intérieurs à X, c'est-à-dire $\overset{\circ}{X} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x, r) \subset X\}$.

Remarque : On a toujours l'inclusion $\overset{\circ}{X} \subset X$.

Proposition 2.2

Une partie $X \subset E$ est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{X} = X$.

Proposition 2.3

Soit X une partie de E, alors $\overset{\circ}{X}$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans X. Par conséquent, $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans X.

Plan du chapitre

Définition 2.4

On dit qu'un élément $a \in E$ est **adhérent** *à une partie $X \subset E$ si*

$$\forall r > 0, \quad B(a,r) \cap X \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence** *de X l'ensemble, noté $\overline{X}$, des éléments adhérents à X.*

Remarque : On a toujours l'inclusion $X \subset \overline{X}$ puisque pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $x \in B(x,r) \cap X$.

Proposition 2.5

Soit X une partie de E, alors

$$E \backslash \overline{X} = \overset{\circ}{(E \backslash X)} \quad \textit{et} \quad E \backslash \overset{\circ}{X} = \overline{E \backslash X}.$$

Proposition 2.6

Une partie $X \subset E$ est fermée si et seulement si $\overline{X} = X$.

Proposition 2.7

Soit X une partie de E, alors $\overline{X}$ est l'intersection de tous les fermés contenant X. Par conséquent, $\overline{X}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant X.

Proposition 2.8 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Soient X une partie de E et $a \in E$. On a équivalence entre :

1. *a est adhérent à X,*
2. *il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a.*

Plan du chapitre

Définition 2.9

On appelle **frontière** *d'une partie X de E l'ensemble* $\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \backslash \mathring{X}$.

Remarque : On peut voir que

$$\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \cap (E \backslash \mathring{X}) = \overline{X} \cap \overline{E \backslash X} = \mathrm{Fr}(E \backslash X)$$

Cette écriture permet aussi de démontrer que $\mathrm{Fr}(X)$ est un fermé de E.

Plan du chapitre

Definition 1

Une partie X de E est dite **dense** si $\overline{X} = E$.

Proposition 2.10

Soit X une partie de E. On a équivalence entre :

1. *X est une partie dense de E,*
2. $\forall a \in E, \quad \forall r > 0, \quad B(a, r) \cap X \neq \emptyset,$
3. $\forall a \in E, \quad \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a.$

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Définition 3.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E. *On appelle* **suite extraite** *(ou sous-suite) de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *toute suite de la forme* $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.*

Remarque : Si $w = (w_n)_n$ est une suite extraite de $v = (v_n)_n$, elle-même extraite de $u = (u_n)_n$, alors la suite w est une suite extraite de u. En effet, notons $v = (u_{\varphi(n)})_n$ et $w = (v_{\psi(n)})_n$ avec $\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{\varphi\circ\psi(n)}$$

avec $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante comme composée de deux fonctions strictement croissantes.

Théorème 3.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E. *Si* $(u_n)_n$ *converge vers* $\ell \in E$, *alors toute suite extraite de* $(u_n)_n$ *converge aussi vers* ℓ.

Plan du chapitre

Définition 3.3

Une partie K de E est dite **compacte** *si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente dans K, i.e.*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}},\ \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante },\ x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in K.$$

On dit aussi que K est un compact de E.

Proposition 3.4

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Théorème 3.5

Si E est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Corollaire 3.6 (Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.