Feuille d'exercices numéro 7
Applications linéaires (1)

Exercice 7.1
Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_1(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$.
2. $f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$.
3. $f_3 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_3(x, y, z) = xyz$.
4. $f_4 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_4(x, y, z) = (10, 100, 1000)$.
5. $f_5 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_5(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
6. $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $f_6(x) = (x, 7x, 2x)$.
7. $f_7 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_7(x, y) = (\sin x, \cos y)$.
8. $f_8 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_8(x, y, z) = (y, z, z)$.

Exercice 7.2

1. Déterminer l'ensemble des applications linéaires surjectives de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^6$.
2. Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 7.3
Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^5$ définie pour tous α, β reéls par

$$f[(\alpha, \beta)] = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et préciser sa dimension.

Exercice 7.4
Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \quad v = (1, -1, 3), \quad w = (3, 3, -5).$$

On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w).

1. Déterminer une base de F.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par

   $$f[(\alpha, \beta, \gamma)] = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Préciser le rang de f.
4. A-t-on $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?
5. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\operatorname{Im} f$?
6. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 7.5
Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme défini pour tout (a, b, c) dans $\mathbf{R}^3$ par

$$u(a, b, c) = (-b + 2c, 2a - 3b + 4c, a - b + c),$$

et soit $v = u + \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
2. Quel est le rang de u ? Déterminer une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.
3. Quel est le rang de v ? Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} v$?
4. Montrer que pout tout $x \in \operatorname{Ker} v$, on a $u(x) = -x$. En déduire que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$, puis que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$.
5. Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.
6. Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, on a $u^3(x) = u(x)$, et que pour tout $x \in \operatorname{Ker} v$, on a $u^3(x) = u(x)$.
7. Montrer que $u^3 = u$.

Exercice 7.6
Dans chacun des cas suivants, déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $g : E \to E$.

1. $E = \mathbf{R}^3$, $g(x, y, z) = (x - y, -x + y, 0)$.
2. E est un espace vectoriel de base (e_1, e_2, e_3), et g est l'unique application linéaire qui vérifie $g(e_1) = e_2, g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) = e_1 + e_2$.

Exercice 7.7
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et g un endomorphisme de E tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$.

1. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} g$ ne peut être égal ni à 0 ni à 3.
2. Si l'on suppose que $\dim \operatorname{Ker} g = 2$, montrer que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g^2$, puis que $g^2 = 0$.
3. Conclure que $\dim \operatorname{Ker} g = 1$.

Exercice 7.8
Soit n un entier, et $\mathbf{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$? Donner une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

Exercice 7.9
Soit $u : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_4[X]$ définie par $u(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle surjective ? injective ? Donner une base de $\operatorname{Im} u$.

Exercice 7.10
Soit $u : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ définie par $u(P) = (1 - X^2)P' + 2XP$.

1. Vérifier que u est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ? surjective ?
3. Soit $P_1(X) = (X + 1)^2, P_2(X) = X^2 - 1$ et $P_3(X) = (X - 1)^2$. Vérifier que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$. Exprimer $u(P_1), u(P_2)$ et $u(P_3)$ comme combinaisons linéaires de P_1, P_2 et P_3.

Exercice 7.11
Pour un entier n, soit $F = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \ : \ P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Déterminer la dimension de F, et donner une base de F.
3. Expliciter un supplémentaire de F.

Exercice 7.12
On définit $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \ : \ \int_0^2 P(t)dt = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$, et déterminer une base de F.