Version brève
– Soit $f : E \to F$ une *application* : un élément $x \in E$ a *exactement une* image, notée $f(x)$.
– Soit $f : E \to F$ une *fonction* : un élément $x \in E$ a *au plus une*[1] image, notée $f(x)$ si elle existe.
– Le graphe d'une telle chose est :

$$\Gamma = \big\{(x, y) \in E \times F,\ [x \text{ a une image et}]\ y = f(x)\big\}.$$

Fonction
Une *fonction* est la donnée de trois ensembles (E, F, Γ) où :
– l'ensemble E est appelé l'ensemble de départ,
– l'ensemble F est appelé l'ensemble d'arrivée,
– l'ensemble Γ, appelé graphe de f, est un ensemble de couples (x, y) formés par un élément de l'ensemble de départ $x \in E$ et un élément de l'ensemble d'arrivée $y \in F$, soumis à la condition :

$$\forall x \in E,\ \forall (y, y') \in F \times F,\ \big((x, y) \in \Gamma \text{ et } (x, y') \in \Gamma\big) \implies y = y'.$$

Cela signifie qu'il y a au plus un point de Γ ayant une abscisse donnée x. On peut reformuler cette condition de la façon suivante. Si on choisit un élément x de E, deux cas peuvent se produire :
– soit il existe $y \in \Gamma$ tel que $(x, y) \in \Gamma$, auquel cas y est unique ; on note alors $y = f(x)$ et on dit que y est l'image de x par f ;
– soit il n'existe pas de $y \in \Gamma$ tel que $(x, y) \in \Gamma$, auquel cas on dit que x n'a pas d'image par f.
Ainsi, un élément x a *au plus une image* par une fonction f.

Exemple : on peut définir une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la règle suivante : 0 n'a pas d'image et, si $x \neq 0$, l'image de x est : $f(x) = 1/x$.

Remarques :
– Au lieu de noter $f = (E, F, \Gamma)$, on note $f : E \to F$ en sous-entendant Γ.
– Lorsque $x \in E$ a une image $f(x)$, on a : $(x, f(x)) \in \Gamma$.
– Mieux : le graphe Γ est l'ensemble des couples (x, y) tels que x a une image et $y = f(x)$:

$$\Gamma = \{(x, y) \in E \times F,\ x \text{ a une image et } \ y = f(x)\}.$$

Application
On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est une *application* si tout élément $x \in E$ a *au moins* une image. Il n'a pas sauté aux yeux de tous que comme f était déjà une fonction, x avait aussi *au plus* une image. Et donc, tout x a *exactement* une image par une application.
En symboles, une partie Γ de $E \times F$ est le graphe d'une application si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in \Gamma.$$

L'image par l'application f définie par E, F et Γ d'un élément $x \in E$ est alors l'unique élément y tel que $(x, y) \in \Gamma$. On note plutôt : $y = f(x)$.

Remarque : soit $f : E \to F$ une fonction. Soit E' l'ensemble des éléments de E qui ont une image par f (on peut appeler E' l'*ensemble de définition* de f). Alors f détermine une application g de E' dans F : si $x \in E'$, son image par f est par définition son image par g : $f(x) = g(x)$.
Inversement, si on se donne une partie E' de E et une application g de E dans F, on définit une fonction de E dans F en décrétant que les éléments de E' ont pour image : $f(x) = g(x)$, et que les éléments de E qui n'appartiennent pas à E' n'ont pas d'image par f.

1. C'est-à-dire, zéro ou une.