Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2020-2021

Analyse IV - Cursus préparatoire au métier de l'ingénieur Durée : 1 heure 30 minutes

---

Examen final seconde session du jeudi 23 juin 2021

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation. Tous les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1.

1. Déterminer le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{3n}}{3n}$.
2. Préciser le domaine de convergence de cette série entière.
3. Pour $x \in]-R;R[$, exprimer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{3n}$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 2. On rappelle l'équivalent suivant : $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{n+x}{1+n^3x}\right)$.

1. Déterminer le domaine de convergence simple, noté D, de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur D.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a;+\infty[$ pour tout $a > 0$.
4. On note S la fonction somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$. Montrer que S admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ et l'exprimer à l'aide de la somme d'une série que l'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice 3. On note $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 6xy + 10y^2 \leq 1\}$. L'ensemble A est-il ouvert ? fermé ? compact ?

Exercice 4. On note $E = \mathcal{C}([0;1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \, \|_2$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t}.$$

On considère la forme linéaire $\varphi : (E, \| \, \|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, | \, |)$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad \varphi(f) = \int_0^1 t f(t) \,\mathrm{d}t.$$

À l'aide d'une inégalité classique, montrer que φ est continue.

Exercice 5. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0;1]} |P(t)|$. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = PP'.$$

1. Montrer que l'application $N : P \longmapsto \|P\|_\infty + \|P'\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Les normes N et $\| \ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Montrer que, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\|PQ\|_\infty \leq \|P\|_\infty \|Q\|_\infty$.
4. À l'aide de la norme N, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $H \in \mathbb{R}_2[X]$, $\|H'\|_\infty \leq \alpha \|H\|_\infty$.
5. En déduire que $HH' = o(\|H\|_\infty)$ quand H tend vers $0_{\mathbb{R}_2[X]}$.
6. Montrer que l'application f est différentiable sur $\mathbb{R}_2[X]$ et expliciter $\mathrm{d}f(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$.