Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2017-2018

Maths III PMI - Analyse

Correction de la session 2 de 2017

Correction de l'exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons $f_a :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \dfrac{t - \sin(t)}{t^a}$ pour $t > 0$. La fonction f_a est continue sur $]0; +\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g(t) := t - \sin(t) \geq 0$ puisque g est dérivable de dérivée $g' : t \longmapsto 1 - \cos(t) \geq 0$, donc g est croissante avec $g(0) = 0$, ce qui entraîne $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f_a est à valeurs positives sur $]0; +\infty[$, donc la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(t)\, dt$ équivaut à l'intégrabilité de f_a sur $]0; +\infty[$.

- Au voisinage de 0 :

$$t - \sin(t) = t - (t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)) = \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

ce qui entraîne

$$f_a(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{t^3/6}{t^a} = \frac{1}{6}\frac{1}{t^{a-3}}.$$

Comme la fonction de Riemann $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{a-3}}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $a - 3 < 1$, par comparaison de fonctions positives, f_a est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $a < 4$.

- Au voisinage de $+\infty$: comme $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$f_a(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{t}{t^a} = \frac{1}{t^{a-1}}$$

Par comparaison à une fonction de Riemann, f_a est donc intégrable si et seulement si $a - 1 > 1$ ce qui équivaut à $a > 2$.

Ainsi, l'intégrale donnée converge si et seulement si $a \in]2; 4[$.

Correction de l'exercice 2 :

(a). Par croissances comparées, $n^5 e^{-\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n^3 e^{-\sqrt{n}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Puisque la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de la série $\sum n^3 e^{-\sqrt{n}}$.

(b). • La série $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ est une série alternée puisque pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{\ln n}{n} \geq 0$.

• Par croissance comparée, $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

• Posons $f : x \in]0; +\infty[\longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée $f' : x \longmapsto \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$ qui est à valeurs négatives sur $[e; +\infty[$. Par conséquent, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang 3.

Par le critère des séries alternées, la série $\sum (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$ est donc convergente.

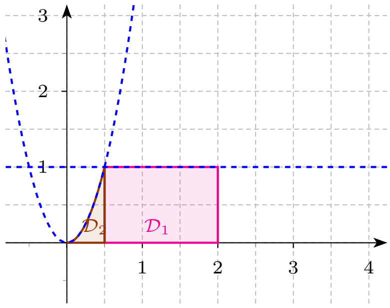
(c). On peut chercher à faire un développement limité puisque $\dfrac{3}{\sqrt{n+2}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$:

$$\begin{aligned} e^{3/\sqrt{n+2}} - 1 &= 1 + \frac{3}{\sqrt{n+2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) - 1 \\ &= \frac{3}{\sqrt{n+2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) \\ &\sim_{n \to +\infty} \frac{3}{n} \end{aligned}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum e^{3/\sqrt{n+2}} - 1$ diverge.

Correction de l'exercice 3 :

1. On trace la parabole d'équation $y = 4x^2$ ainsi que les droites délimitant x et y afin d'obtenir le domaine $\mathcal{D}$ réunion des domaines $\mathcal{D}_1$ (en rouge) et $\mathcal{D}_2$ (en rose) :



2. La fonction $f : (x, y) \longmapsto xy$ est continue sur $\mathcal{D}$ car polynomiale. De plus, $\mathcal{D}$ est une partie élémentaire puisque l'on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \min(1, 4x^2)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, \}\end{aligned}$$

On peut donc intégrer par piles ou par tranches. La première expression ayant l'air plus simple, on va intégrer par tranches. En remarquant que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, il vient alors

$$\begin{aligned}I &= \iint_{\mathcal{D}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathcal{D}_1} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \iint_{\mathcal{D}_2} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_{x=0}^{1/2} \left(\int_{y=0}^{4x^2} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x + \int_{x=1/2}^{2} \left(\int_{y=0}^{1} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1/2} \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{4x^2} \mathrm{d}x + \int_{x=1/2}^{2} \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{1} \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1/2} 8x^5 \, \mathrm{d}x + \int_{x=1/2}^{2} \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{4x^6}{3} \right]_0^{1/2} + \left[\frac{x^2}{4} \right]_{1/2}^{2} \\ &= \frac{23}{24}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 :

1. Soit $x \in [0; +\infty[$, alors $|\sin(x)| \leq 1$ et il y a égalité si et seulement si x est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π. On distingue donc les cas.

   - Si $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N}$, alors $|\sin(x)| < 1$ donc $0 \leq (\sin x)^2 < 1$. Par suite

   $$(\sin x)^{2n} = ((\sin x)^2)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

   et donc $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x+2}$.

- Si $x \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N}$, alors $\sin(x) = \pm 1$ d'où $(\sin x)^2 = 1$ ce qui entraîne

$$f_n(x) = \frac{1}{x + (\sin x)^{2n} + 2} = \frac{1}{x+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x+3}$$

On vient donc de démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} \text{ si } x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N} \\ \dfrac{1}{x+3} \text{ si } x \in \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N} \end{cases} \end{array}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a $x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{N}$ donc

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{x + (\sin x)^{2n} + 2} - \frac{1}{x+2} \right| \\ &= \left| \frac{-(\sin x)^{2n}}{(x + (\sin x)^{2n} + 2)(x+2)} \right| \\ &= \frac{(\sin x)^{2n}}{(x + (\sin x)^{2n} + 2)(x+2)} \\ &\leq \frac{(\sin 1)^{2n}}{4} \end{aligned}$$

par croissance de sin sur $[0;1]$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^+$) ainsi que croissance de $t \longmapsto t^{2n}$ sur $\mathbb{R}^+$, et puisque $(x + (\sin x)^{2n} + 2)(x+2) \geq 4$. On en déduit que la fonction $f_n - f$ est bornée sur le segment $[0;1]$ et, puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de l'ensemble :

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty,[0;1]} = \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{(\sin 1)^{2n}}{4}$$

Comme $(\sin 1)^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque 1 n'est pas congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π, le théorème des gendarmes entraîne que $\|f_n - f\|_{\infty,[0;1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui démontre la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f sur $[0;1]$.

3. Remarquons que dans $[0;2]$, le seul réel congru à $\pi/2$ modulo π est $\pi/2$ donc

$$\forall x \in [0;2]\backslash\{\pi/2\}, \quad f(x) = \frac{1}{x+2} \text{ et } f(\pi/2) = \frac{1}{\pi/2+3}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ (donc sur $[0;2]$) comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas (puisque $x + (\sin x)^{2n} + 2 \geq 2$). Si $(f_n)_n$ convergeait uniformément vers f sur $[0;2]$, par le théorème de continuité pour les suites de fonctions, f devrait aussi être continue sur $[0;2]$ ce qui est contradictoire puisque f est discontinue en $\dfrac{\pi}{2}$:

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2 \\ \neq}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\pi/2 \\ \neq}} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{\pi/2+2} \neq \frac{1}{\pi/2+3} = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Correction de l'exercice 6 :

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x,t) = e^{ixt}\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

1. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

   - La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ en tant que composée, produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= \left| e^{ixt} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right| \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ (donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0;+\infty[$), on a $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$. Par comparaisons de fonctions positives, $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

- Les deux premiers points ont été vérifiés à la première question.
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ donc elle admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| &= \left| i e^{ixt} \sqrt{t} e^{-t} \right| \\ &= \sqrt{t} e^{-t} \end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (donc intégrable sur $[0;A]$ pour tout $A > 0$) et $\sqrt{t}e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$. Donc $t \longmapsto \sqrt{t}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre montre que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} i e^{ixt} \sqrt{t} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\ &= i \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{t(-1+ix)} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Afin de retomber sur F à partir de F', on fait une intégration par parties généralis‘‘ee, les fonctions $t \longmapsto \sqrt{t}$ et $t \longmapsto \dfrac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix}$ étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^\star$ et leur produit admet une limite finie en 0^+ et $+\infty$. Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées donne :

$$\begin{aligned} F'(x) &= i \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{t(-1+ix)} \,\mathrm{d}t \\ &= i \left(\left[\sqrt{t} \frac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2(-1+ix)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{t(-1+ix)} \,\mathrm{d}t \right) \\ &= -\frac{i}{2} \frac{1}{-1+ix} F(x) \\ &= \frac{i(1+ix)}{2\,(1+x^2)} F(x) \end{aligned}$$

4. On résout l'équation différentielle $(E) : y'(x) + \dfrac{i(1+ix)}{2\,(1+x^2)} y(x)$ sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont les fonctions :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto C \exp\left(\frac{i}{2} \arctan x - \frac{1}{4} \ln\left(1+x^2\right) \right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} F(x) &= C \exp\left(\frac{i}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)\right) \\ &= C\frac{e^{i/2\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{1/4}} \end{aligned}$$

Afin de déterminer C, on calcule $F(0)$ grâce au changement de variable $u = \sqrt{t}$. La fonction $t \longmapsto t^2$ réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$, donc le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées donne :

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}(2u\,\mathrm{d}u) \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Comme $F(0) = C$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sqrt{\pi}\frac{e^{i/2\arctan x}}{\left(1+x^2\right)^{1/4}}.$$