

CORRECTION DE LA SESSION 2 DE 2017

Correction de l'exercice 1 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons $f_a :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \frac{t - \sin(t)}{t^a}$ pour $t > 0$. La fonction f_a est continue sur $]0; +\infty[$ donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $g(t) := t - \sin(t) \geq 0$ puisque g est dérivable de dérivée $g' : t \mapsto 1 - \cos(t) \geq 0$, donc g est croissante avec $g(0) = 0$, ce qui entraîne $g(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction f_a est à valeurs positives sur $]0; +\infty[$, donc la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_a(t) dt$ équivaut à l'intégrabilité de f_a sur $]0; +\infty[$.

- Au voisinage de 0 :

$$t - \sin(t) = t - \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) = \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

ce qui entraîne

$$f_a(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3/6}{t^a} = \frac{1}{6} \frac{1}{t^{a-3}}.$$

Comme la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{a-3}}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $a - 3 < 1$, par comparaison de fonctions positives, f_a est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $a < 4$.

- Au voisinage de $+\infty$: comme $\frac{\sin(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$,

$$f_a(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t}{t^a} = \frac{1}{t^{a-1}}$$

Par comparaison à une fonction de Riemann, f_a est donc intégrable si et seulement si $a - 1 > 1$ ce qui équivaut à $a > 2$.

Ainsi, l'intégrale donnée converge si et seulement si $a \in]0; 2[$.

Correction de l'exercice 2 :

(a). Par croissances comparées, $n^5 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $n^3 e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de la série $\sum n^3 e^{-\sqrt{n}}$.

(b). • La série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est une série alternée puisque pour tout $n \geq 1$, $\frac{\ln n}{n} \geq 0$.

- Par croissance comparée, $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Posons $f : x \in]0; +\infty[\mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée $f' : x \mapsto \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ qui est à valeurs positives sur $[e; +\infty[$. Par conséquent, la suite $\left(\frac{\ln n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang 3.

Par le critère des séries alternées, la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est donc convergente.

(c). On peut chercher à faire un développement limité puisque $\frac{3}{\sqrt{n+2}}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} e^{3/\sqrt{n+2}} - 1 &= 1 + \frac{3}{\sqrt{n+2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) - 1 \\ &= \frac{3}{\sqrt{n+2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{n} \end{aligned}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum e^{3/\sqrt{n+2}} - 1$ diverge.

Correction de l'exercice 6 :

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, t) = e^{ixt} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

1. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ en tant que composée, produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &= \left| e^{ixt} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \right| \\ &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* (donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$), on a $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Par comparaisons de fonctions positives, $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre que la fonction F est continue sur \mathbb{R} .

2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

- Les deux premiers points ont été vérifiés à la première question.
- La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ donc elle admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| &= \left| ie^{ixt} \sqrt{t} e^{-t} \right| \\ &= \sqrt{t} e^{-t} \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{t} e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}_+ (donc intégrable sur $[0; A]$ pour tout $A > 0$) et $\sqrt{t} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \rightarrow +\infty$. Donc $t \mapsto \sqrt{t} e^{-t}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre montre que la fonction F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} ie^{ixt} \sqrt{t} e^{-t} dt \\ &= i \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{t(-1+ix)} dt \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Afin de retomber sur F à partir de F' , on fait une intégration par parties généralisée, les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto \frac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix}$ étant de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* et leur produit admet une limite finie en 0^+ et $+\infty$. Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées donne :

$$\begin{aligned} F'(x) &= i \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{t(-1+ix)} dt \\ &= i \left(\left[\sqrt{t} \frac{e^{t(-1+ix)}}{-1+ix} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2(-1+ix)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{t(-1+ix)} dt \right) \\ &= -\frac{i}{2} \frac{1}{-1+ix} F(x) \\ &= \frac{i(1+ix)}{2(1+x^2)} F(x) \end{aligned}$$

4. On résout l'équation différentielle (E) : $y'(x) + \frac{i(1+ix)}{2(1+x^2)}y(x)$ sur \mathbb{R} . Les solutions sont les fonctions :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto C \exp\left(\frac{i}{2} \arctan x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2)\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} F(x) &= C \exp\left(\frac{i}{2} \arctan x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2)\right) \\ &= C \frac{e^{i/2 \arctan x}}{(1+x^2)^{1/4}} \end{aligned}$$

Afin de déterminer C , on calcule $F(0)$ grâce au changement de variable $u = \sqrt{t}$. La fonction $t \mapsto t^2$ réalise une bijection de classe C^1 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* , donc le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées donne :

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} (2u du) \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Comme $F(0) = C$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sqrt{\pi} \frac{e^{i/2 \arctan x}}{(1+x^2)^{1/4}}.$$