Université Claude Bernard Lyon 1
Math L2 « Fonctions de plusieurs variables »
Examen : mercredi 21 juin 2017 : durée 1h30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considérée comme une tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure).

Ainsi que votre nom et votre numéro d'étudiant, identifier sur votre copie (en haut, très lisible) votre Parcours (c'est soit Math-Info, soit Cursus Préparatoire).

Attention : Il s'agit de traiter les exercices 1 à 6 et <u>un seul</u> (au choix) des exercices 7 ou 8.

1. (2 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y) = 3x^2y + x^2 - 6x - 3y + 8$. Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$u(0) = 0,\ u'(0) = -3,\ v(0) = -1,\ v'(0) = 4,$$

et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $g(t) := f(u(t), v(t))$. Calculer $g'(0)$.

2. (2 points) Étudier la nature de la série suivante : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\tan\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$.

3. (2 points) Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x-1)^r}$ en fonction du paramètre réel r.

4. (3 points)
Trouver toutes les valeurs de $a \in \mathbb{R}_+$ telles que la série $\displaystyle\sum \frac{a^n+2}{\sqrt{n}\,3^n+4}$ converge.

5. (3 points) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}.$$

(a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.

(b) La convergence est-elle uniforme ?

(c) Soit $a > 0$. En étudiant les variations de $g : x \longmapsto (x^2+1)e^{-x}$ sur $[a, +\infty[$, démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

6. (3 points) Soit Ω le domaine de $\mathbb{R}^2$ décrit par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 25\}.$$

(a) Représenter graphiquement l'allure du domaine Ω.

(b) Calculer $\displaystyle\iint_\Omega xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

SOIT

7. (5 points) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto f(x) := 3x - 2y + z$, et soit S la sphère définie par

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 14\}.$$

(a) Pourquoi peut-on affirmer que la fonction f atteint ses bornes (c-à-d, son minimum et son maximum) sur S ?

(b) Calculer en utilisant la règle du multiplicateur les bornes de f sur S.

OU

8. (5 points) On considère la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{tx} \, \mathrm{dt}.$$

(a) Soit $a > 0$. Montrer que la restriction de F à $[-a, a]$ est de classe C^1.

(b) En déduire que F est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire d'ordre un que l'on précisera.

(c) On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{dt} = \sqrt{\pi}$. Déterminer une expression explicite (sans intégrale) de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.