Université Claude Bernard - Lyon 1 SP 2015-2016
Analyse IV - Math 2029L Lundi 6 juin 2016

Examen terminal
Durée: 2 heures

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1 (7 points=1+1,5+2+1,5+1). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $u_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge simplement sur $]0; +\infty[$. On note alors S la somme de cette série de fonctions sur $]0; +\infty[$: pour tout $x > 0$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

2. La série de fonctions $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $]0; +\infty[$?
3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et donner une expression de $S'(x)$ sous forme d'une série pour tout $x > 0$.
5. Démontrer l'égalité suivante, pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x}.$$

6. (**Bonus 1 point**) En déduire un équivalent de $S(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 2 (7 points =2+2+1+2). Soit $\lambda \in]0;+\infty[$ fixé. On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que :

$$\forall t \in]-\pi;\pi[, \quad f(t) = \mathrm{sh}(\lambda t) \quad \text{et } f(\pi) = 0.$$

1. Vérifier que f est continue par morceaux et calculer les coefficients de Fourier exponentiels (ou complexes) de f.
2. En déduire les coefficients de Fourier trigonométriques (ou réels) de f et déterminer la série de Fourier de f en formulation réelle.
3. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
4. Déterminer les valeurs des sommes suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{\lambda^2+(2n+1)^2}$,
   (b) (**Bonus 2 points**) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(\lambda^2+n^2)^2}$.

Exercice 3 (7 points =1,5+0,5+1,5+2+1,5). Pour x réel, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

On rappelle que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin u| \leq |u|$.

1. Justifier l'existence de F sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $0 \leq 1-\cos(u) \leq \dfrac{u^2}{2}$.
3. Montrer que F est continue sur $[-a;a]$ pour tout réel $a > 0$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $F''(x)$ à l'aide d'une intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $F''(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. (**Bonus 2 points**) En déduire une expression explicite (sans intégrale ni série) de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.