Corrigé :

1. On montre que la fonction intégrée $f(x)$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.
Ensuite on observe $\ln x \leq Mx^{1/2}$ (croissance comparée).
On en déduit $f(x) \leq Mx^{1/2}/x^2 = Mx^{-3/2}$.
Il suit par comparaison (intégrale de Riemann convergente) que l'intégrale est convergente (que f est intégrable sur $[1,+\infty[$).

2. On trouve $\lim \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x-3|/2$.
Par le critère de d'Alembert, on déduit que $\sum |u_n|$ (et donc $\sum u_n$) converge pour $x \in]1,5[$.
Pour $|x-3| > 2$, on voit que $|u_n|$ ne tend pas vers 0, d'où la divergence grossière de $\sum u_n$.
Pour $x = 5$, le terme général de la série devient $1/(1+\sqrt{n})$, diverge par équivalence avec une série de Riemann connue.
Pour $x = 1$, le théorème des séries alternées s'applique, car $n \mapsto 1/(1+\sqrt{n})$ est décroissant, d'où convergence.
Réponse : $x \in [1,5[$.

3. Posons $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x^2+xy, 3y)$ de sorte que $g = f \circ \varphi$. La fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ puisque ses fonctions coordonnées (notées φ_1 et φ_2) sont polynomiales. Par le théorème de composition, la fonction $g = f \circ \varphi$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ce qui justifie l'existence de ses dérivées partielles, et en particulier de $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1)$. Pour les calculer, on peut utiliser la formule de dérivation en chaîne ou les matrices jacobiennes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(0,1)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(0,1)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,1) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) \times (2 \times 0 + 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \times 0 \\
&= 3
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(0,1)) \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(0,1)) \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(0,1) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(0,3) \times 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,3) \times 3 \\
&= -15.
\end{aligned}$$

4.

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^3 r^3 \cos^2\theta \, dr d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \, d\theta$$
$$= \frac{81}{8} \int_0^{\pi/4} (1+\cos(2\theta)) \, d\theta = \frac{81}{32}(\pi+2).$$

5.

(a) On trouve $f(x)=x$, sauf que $f(\pi/2)=\pi/2+1$.
(b) Puisque les f_n sont continues sur $[0,2]$, mais pas f, la convergence ne peut être uniforme.

$$\text{(c) } \|f_n-f\|_{\infty,[0,a]}=\sup\left|(\sin x)^n+x\left(e^{x/n}-1\right)\right|\leq(\sin a)^n+a\left(e^{a/n}-1\right)\to 0,$$

d'où la conclusion.

6.

(a) $yz+xyz_x+\pi\cos(\pi z)z_x=0 \implies z_x(1,2)=8/(2+\pi)$.

(b) La fonction g à gauche est convexe et $(1,1)$ est un point critique de g
$\implies g(x,y)\geq g(1,1)=0\,\forall(x,y)$.

(c) L'équation d'Euler mène à l'unique extrémale $x_*(t)=-t^2-2+ce^t+de^{-t}$, où $c+d=2$, $ce+d/e=4$; c'est un min global car le lagrangien $L(t,x,v)=v^2+2t^2x+x^2$ est convexe en (x,v).

7.

1. La fonction φ_a est continue, positive sur $]0;+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0;+\infty[$. De plus, lorsque $t\to 0^+$, on a $\varphi_a(t)=\dfrac{1-1+at^2+o(t^2)}{t^2}=a+o(1)\underset{t\to 0^+}{\longrightarrow}a$. Ainsi, φ_a se prolonge par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0;1]$. Enfin, on a $0\leq\varphi_a(t)\leq\dfrac{1}{t^2}$ avec $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ intégrable sur $[1;+\infty[$, donc par comparaison de fonctions positives, φ_a est intégrable sur $[1;+\infty[$ et ainsi sur $]0;+\infty[$.

2. Posons $f:\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x,t)=\dfrac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$.
   - f est continue, même de classe $\mathscr{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$ comme quotient de la composée de $u\longmapsto 1-e^u$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec la fonction polynomiale $(x,t)\longmapsto -xt^2$, et de la fonction polynomiale $(x,t)\longmapsto t^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$.
   - Soit $a>0$. Soit $(x,t)\in[0;a]\times]0;+\infty[$, on a
   $$|f(x,t)|=\frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}\leq\frac{1-e^{-at^2}}{t^2}=\varphi_a(t)$$
   car la fonction $u\longmapsto 1-e^{-ut^2}$ est croissante. Comme $\varphi_a:]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^+$ est indépendante de x et intégrable sur $]0;+\infty[$ d'après la première question, on peut appliquer le théorème de continuité par domination : la restriction de F à $[0;a]$ est (bien définie et) continue sur $[0;a]$, ceci pour tout $a>0$, donc F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. On a déjà vérifié les deux premières hypothèses du théorème de dérivation par domination.
   - La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$, donc elle admet une dérivée partielle par rapport ‡ x, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, qui est continue sur $\mathbb{R}^+\times]0;+\infty[$.

- Soit $0 < b < a$. Pour tout $(x,t) \in [b;a] \times]0;+\infty[$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2 e^{-xt^2}}{t^2}\right| = e^{-xt^2} \leq e^{-bt^2} := \psi(t)$$

  La fonction $\psi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable sur $]0;1]$, et par croissances comparées, elle est négligeable devant $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, donc elle est intégrable sur $[1;+\infty[$ et ainsi sur $]0;+\infty[$.

Par le théorème de dérivation, on en déduit que la restriction de F à $[b;a]$ est de classe $\mathscr{C}^1$, ceci pour tous $0 < b < a$, donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{x}t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{par changement de variable } u = \sqrt{x}t \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

4. Puisque F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = \sqrt{\pi x} + \lambda$. Or par continuité de F en 0, on a d'une part $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = 0$ et d'autre part $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = 0 + \lambda$ donc $\lambda = 0$ par unicité de la limite. Ainsi, $F(x) = \sqrt{\pi x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.