Université Claude Bernard Lyon 1
Math L2 « Fonctions de plusieurs variables »
Examen : mardi 3 juillet 2018 : durée 1h30

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considérée comme une tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure). Le sujet est imprimé sur une feuille imprimée recto-verso.

Ainsi que votre nom et votre numéro d'étudiant, identifier sur votre copie (en haut, très lisible) votre Parcours (c'est soit Math-Info, soit Cursus Préparatoire).

Attention : Il s'agit de traiter les exercices 1, 2, 3, 4 et un seul (au choix) des exercices 5 ou 6.

1. (3 pts) Déterminer toutes les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^a}\, dt$ converge.

2. (3 pts) Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\textbf{(a)} \quad \sum n^3 e^{-\sqrt{n}} \qquad \textbf{(b)} \quad \sum (-1)^n \frac{\ln n}{n} \qquad \textbf{(c)} \quad \sum \left(e^{\frac{3}{\sqrt{n+2}}} - 1 \right)$$

3. (3 pts) On s'intéresse au calcul de l'intégrale double $I := \displaystyle\iint_D xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\, 0 \leq y \leq 1,\, y \leq 4x^2\}.$$

(a) Dessiner le domaine D.

(b) Calculer I.

4. (3 pts) On considère les fonctions continues $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ définies par la règle

$$f_n(x) = \frac{1}{x + (\sin x)^{2n} + 2} \quad (x \geq 0).$$

(a) Trouver la fonction f qui est la limite simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, +\infty[$.

(b) Prouver que la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur $[0, 1]$.

(c) Est-ce que la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur $[0, 2]$?

SOIT

5. (8 points)

(a) Trouver l'équation de la droite normale à la surface de niveau

$$x^2yz+3y^2-2xz^2+8z=0$$

au point $(1,2,-1)$.

(b) On considère la minimisation de la fonction

$$f(x,y)=x^2+4xy+9x+11y+y^3+6y^2$$

sur le demi-plan $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geqslant 0\}$. Résoudre ce problème d'optimisation, en justifiant. [Suggestion : montrer que $(-13/2,1)$ est un point critique de f.]

OU

6. (8 points)

On considère la fonction $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\int_0^{+\infty} e^{ixt}\,\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et expliciter F' à l'aide d'une intégrale.
3. Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\text{(E)}\qquad y'(x)=\frac{i(1+ix)}{2\,(1+x^2)}\,y(x).$$

4. En déduire l'expression de F à l'aide de fonctions usuelles.
   On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.