Feuille d'exercices numéro 8
APPLICATIONS LINÉAIRES (2)

Exercice 8.1

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ engendré par sin et cos.

1. Déterminer une base de H et préciser sa dimension.
2. Montrer que l'application $f \mapsto f'$ détermine un endomorphisme de H et donner sa matrice dans la base de la question précédente.
3. On désigne par g, h et k les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies pour tout $x \in \mathbf{R}$ par
$$g(x) = \sin(2x), \quad h(x) = \sin(x+1), \quad k(x) = 1.$$
Les applications f, g et h sont-elles des éléments de H ?
4. Soit $F = \{f \in H \ : \ f(\pi/3) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H. Quelle est sa dimension ? Déterminer une base de F.
5. Soit $\phi : H \to \mathbf{R}^2$ l'application définie pour $f \in H$ par
$$\phi(f) = \left(f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$
Montrer que ϕ est une application linéaire bijective.

Exercice 8.2

1. Donner un exemple d'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que
$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f \iff f \circ f = 0 \text{ et } \dim E = 2 \operatorname{rg} f.$$

Exercice 8.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Montrer les inclusions
$$\operatorname{Im}(f \circ f) \subset \operatorname{Im}(f) \text{ et } \operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(f \circ f).$$
2. Montrer les équivalences
$$\operatorname{Im}(f \circ f) = \operatorname{Im}(f) \iff \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f \circ f) \iff E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f).$$

Exercice 8.4

1. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, et f, g deux applications linéaires de E vers F. Montrer que
$$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$
2. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E. On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est bijectif. Montrer que
$$\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = \dim(E).$$

Exercice 8.5
On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^∞. On définit ϕ et ψ, deux endomorphismes de E par les formules suivantes, pour $f \in E$

$$\phi(f) = f' \text{ et } \psi(f) = \left[x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right]$$

1. Exprimer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.
2. Déterminer si ϕ et ψ sont injectives et/ou surjectives.

Exercice 8.6
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, en calculant le moins possible, que $\operatorname{Ker} u$ est une droite, et en donner une base a.
2. On note $b = (1, 1, 1)$ et $c = (1, 2, 0)$. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de u dans cette base.
3. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par b et c.
   (a) On note $v : E \to \mathbf{R}^3$ la restriction de u à E. Expliciter la matrice de v de (b, c) dans (a, b, c).
   (b) Montrer que cela a un sens de considérer $w : E \to E$ la restriction de u de E vers E, et écrire la matrice de w dans la base (b, c).

Exercice 8.7
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note E' l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E. Pour toute partie F de E, on définit l'annihilateur de F par

$$F^\perp = \{\phi \in E' \ : \forall x \in F, \phi(x) = 0\}.$$

1. Montrer que pour toute partie F de E, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E'.
2. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \text{ et } (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

3. On note n la dimension de E. Si F est un sous-espace de E de dimension k, quelle est la dimension de $F^\perp$?

Exercice 8.8
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'un endormorphisme p de E est un *projecteur* s'il vérifie $p \circ p = p$.

1. Motnrer que p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id} - p$ est un projecteur.
2. Soit p un projecteur de E. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Im}(\mathrm{id} - p), \quad \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id} - p), \quad E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p).$$

3. Soient p et q deux projecteurs de E.
   (a) Montrer l'équivalence

$$p + q \text{ est un projecteur} \iff p \circ q + q \circ p = 0 \iff p \circ q = q \circ p = 0.$$

   (b) Lorsque les conditions de la question (a) sont vérifiées, montrer que

$$\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im}(p) + \operatorname{Im}(q) \text{ et } \operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker}(p) \cap \operatorname{Ker}(q).$$

   (c) Montrer que si $p \circ q = q \circ p$, alors $p \circ q$ est un projecteur, et

$$\operatorname{Im}(p \circ q) = \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Im}(q) \text{ et } \operatorname{Ker}(p \circ q) = \operatorname{Ker}(p) + \operatorname{Ker}(q).$$