Feuille d'exercices numéro 6

ESPACES VECTORIELS, DIMENSION ET OPÉRATIONS SUR LES SOUS-ESPACES

Exercice 6.1

Soit E l'espace vectoriel des suites de réels, et soit $F \subset E$ l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence

$$\text{pour tout } n \geqslant 0, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de F.
3. Montrer que F est de dimension 2 et que les deux suites de la question précédente en constituent une base.
4. Déterminer toutes les suites (u_n) dans F telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice 6.2

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, 2, 0, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2, 1), \quad v_3 = (2, 0, 4, 2),$$

$$w_1 = (1, 2, 1, 0), \quad w_2 = (-1, 1, 1, 1), \quad w_3 = (2, -1, 0, 1), \quad w_4 = (2, 2, 2, 2),$$

1. Démontrer que les familles (v_1, v_2) et (w_1, w_2, w_3) sont libres.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (v_1, v_2, v_3). Déterminer une base de F.
3. Soit G le sous-espace vectoriel engendré par (w_1, w_2, w_3, w_4). Déterminer une base de G.

Exercice 6.3

Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer la nature géométrique et une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2y - z = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 0 \text{ et } 2y - z = 0\}$.
4. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\}$.
5. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$.
6. $F_3 = F_1 \cap F_2$.

Exercice 6.4

Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x = 2y - z \text{ et } t = x + y + z\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et en déterminer une base.

Exercice 6.5

On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$u = (1, 2, 3, 0) \text{ et } v = (1, 0, -1, 5).$$

1. Donner une base de H.
2. Compléter explicitement cette base en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 6.6

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$a_1 = (0, 1, 1, 1), \quad a_2 = (1, 0, 1, 1), \quad a_3 = (1, 1, 0, 1), \quad a_4 = (1, 1, 1, 0).$$

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (a_1, a_2) et G celui engendré par (a_3, a_4).
Montrer que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 6.7
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + 4y - 5z = 0\}.$$

1. Donner une base (a, b) de F.
2. Compléter cette base en une base (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$.
3. Montrer que $\mathbf{R}^3 = F \oplus \mathbf{R}c$.

Exercice 6.8
On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x + 4y - 5z - 2t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ 3x - y + t = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$; on admettra sans le démontrer que F est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer une base de E, puis une base de F.
3. Déterminer une base de $E + F$, puis une base de $E \cap F$.
4. Soit (f_1, f_2, f_3) la base de F déterminée au 2). Expliciter un vecteur f_4 tel que (f_1, f_2, f_3, f_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 6.9
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, -1, 1, -1), \quad u_3 = (1, 3, 1, 3),$$

$$u_4 = (1, 2, 0, 2), \quad u_5 = (1, 2, 1, 2), \quad u_6 = (3, 1, 3, 1).$$

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3) et G le sous-espace vectoriel engendré par (u_4, u_5, u_6). Déterminer une base de F, de G, de $F + G$ et de $F \cap G$.

Exercice 6.10
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (2, 3, 0, -1), \quad u_2 = (1, 0, 0, 1), \quad u_3 = (0, 1, 0, 0), \quad u_4 = (1, 2, 2, 1).$$

Soit F le sous-espace engendré par (u_1, u_2) et G le sous-espace engendré par (u_3, u_4). Déterminer les sous-espaces $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 6.11
Dans $\mathbf{R}^4$, on note $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x + y + z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$, F la droite de base $(1, 2, 1, 0)$ et G la droite de base $(0, 0, 1, 1)$. Montrer que $\mathbf{R}^4 = E \oplus F \oplus G$.

Exercice 6.12
Soit E un espace vectoriel, et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F + G = F + H, \quad G \subset H.$$

Montrer que $G = H$.

Exercice 6.13
Quand F et G sont deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbf{R}^6$, tous les deux de dimension 4,

1. Quelle peut-être la dimension de $F + G$?
2. Quelle peut-être la dimension de $F \cap G$?

Exercice 6.14
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.
Montrer que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.