

Feuille d'exercices numéro 4
FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 4.1

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbf{R}[X]$:

$$\begin{aligned}
 A(X) &= \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} & B(X) &= \frac{X^2 + 1}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)} & C(X) &= \frac{1}{X(X - 1)^2} \\
 D(X) &= \frac{4}{(X^2 - 1)^2} & E(X) &= \frac{X^4 - 5X^3 + 10X^2 - 8X - 1}{(X - 1)^3(X - 2)} & F(X) &= \frac{1}{X^n(X - 1)} \\
 G(X) &= \frac{4X}{(X - 1)^2(X^2 + 1)^2} & H(X) &= \frac{16807}{(X - 1)^5(X^2 + 2X + 4)} & I(X) &= \frac{1}{X^4 - 1} \\
 J(X) &= \frac{X}{X^4 + 1} & K(X) &= \frac{X^3}{(X + 1)^2(X - 1)^2} & L(X) &= \frac{(X^2 - X + 1)^2}{X^2(X - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Exercice 4.2

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbf{C}[X]$:

$$A(X) = \frac{1}{X^2 + X + 1} \quad B(X) = \frac{X}{(X - 1)(X^2 + 1)^2} \quad C(X) = \frac{1}{(X + 1)(X^3 + 1)} \quad D(X) = \frac{P(X)}{X^n - 1},$$

où $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme vérifiant $\deg P < n$.

Exercice 4.3

Soit P un polynôme complexe de degré n ayant n racines complexes distinctes notées x_1, \dots, x_n . Soit a un complexe distinct de toutes les racines de P .

1. En utilisant des fractions rationnelles, montrer les formules

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k - a} = -\frac{P'(a)}{P(a)},$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_k - a)^2} = \frac{P'(a)^2 - P(a)P''(a)}{P(a)^2},$$

2. On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer que $(P')^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

Exercice 4.4

Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F(X)^2 = X$.

Exercice 4.5

1. En décomposant en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(X+1)}$, calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

2. Calculer selon le même modèle les sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{1+k^2+k^4} \quad \sum_{k=3}^n \frac{2k-1}{k(k^2-4)}$$

Exercice 4.6

On note $F(X) = \frac{1}{X(X^2+1)}$. Calculer la dérivée d'ordre 28 de F .

Exercice 4.7

Soit $F(X) = \frac{1}{X^2+1}$. Montrer que pour tout entier n il existe un polynôme $P_n(X)$ tel que

$$F^{(n)}(X) = \frac{P_n(X)}{(X^2+1)^{n+1}}$$

et déterminer les zéros de P_n .

Exercice 4.8

Donner une condition nécessaire et suffisante sur une fraction rationnelle $F \in \mathbf{C}(X)$ pour qu'il existe $G \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F = G'$.

Exercice 4.9 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \frac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer F en éléments simples sur \mathbf{R} .