Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Cursus préparatoire, semestre 2 : algèbre

Feuille d'exercices numéro 2

POLYNÔMES

Sauf précision contraire, tous les polynômes considérés seront à coefficients complexes.

Exercice 2.1

Déterminer tous les polynômes P vérifiant les relations suivantes

1. $P(X^2+1) = P(X)$,
2. $P(2X+1) = P(X)$,
3. $(1-X)P'(X) - P(X) = X^n$, où $n \in \mathbf{N}$,
4. $P'(X)^2 = 4P(X)$,
5. $P(P(X)) = P(X)$.

Exercice 2.2

Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 2.3 Polynômes de Tchebychev

On considère la suite de polynômes $P_n(x)$ définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, et pour $n \in \mathbf{N}$,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n.
3. Étudier la parité de P_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on a $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Exercice 2.4

Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau des polynômes précisé :

1. $X+1$ dans $\mathbf{R}[X]$,
2. X^2-1 dans $\mathbf{R}[X]$,
3. X^2+1 dans $\mathbf{C}[X]$,
4. X^2+1 dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2.5

1. Soient $P_1, P_2 et Q$ trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 2.6

Quelles sont les racines (dans $\mathbf{C}$, dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{Q}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$,
2. $X^n - 1$, où n est un entier,
3. $X^6 - 4$,
4. $X^4 - 13X^2 + 36$,
5. $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 2.7
Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$. Montrer que $P(\alpha) = 0$ si et seulement si $X - \alpha$ divise P.

Exercice 2.8
Soit P un polynôme, et soient a et b deux réels distincts. Soient λ (respectivement, μ) le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ (respectivement, par $X - b$). Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$. Commenter le cas $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 2.9
Calculer le PGCD unitaire des couples de polynômes (P, Q) suivants, puis en déduire la factorisation de P et Q dans $\mathbf{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$

1. $P(X) = (X - 1)^2(X + 2)^3(X^2 + 1)^4$ et $Q(X) = (X - 1)(X + 7)^3(X^2 + 1)$.
2. $P(X) = X^7 + 2X^6 - X - 2$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - 2X$.
3. $P(X) = nX^{n+1} - (n + 1)X^n + 1$ et $Q(X) = X(X - 1)^2(X - 2)$.
4. $P(X) = X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1$ et $Q(X) = X^7 + X^5 + 8X^4 + X^3 + 8X^2 + 8$.

Exercice 2.10
Soient les polynômes $A(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B(X) = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Calculer leur PGCD unitaire. En déduire un couple de polnômes (U_0, V_0) vérifiant l'identité de Bézout. Déterminer tous les couples de polynômes (U, V) vérifiant cette identité.
Reprendre l'exercice avec $A(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ et $B(X) = X^3 - X^2 + 2X - 1$.

Exercice 2.11
Déterminer un polynôme P de degré 5 tel que $P(X) + 1$ soit divisible par $(X - 1)^3$ et $P(X) - 1$ soit divisible par $(X + 1)^3$.

Exercice 2.12
Calculer $P(X) = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$. En déduire une factorisation de $X^5 + X - 1$, et une preuve que 100009 n'est pas un nombre premier.

Exercice 2.13
Établir les identités, pour $n \in \mathbf{N}^*$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1),$$
$$X^{2n} + 1 = (X + 1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \cdots + (-1)^p X^p \cdots - X + 1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
2. Si le nombre de Fermat $F_n = 2^n + 1$ est premier, alors n est soit nul, soit une puissance de 2.

Exercice 2.14
Déterminer le PGCD de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et de $X^4 - 1$, considérés comme éléments de $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 2.15
Pour quels entiers n le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ (dans $\mathbf{R}[X]$) ?

Exercice 2.16
Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{R}_3[X]$ tels que $(X - 1)^2$ divise $P(X) + 1$ et $(X + 1)^2$ divise $P(X) - 1$.

Exercice 2.17
Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1. $X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$,
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$,
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$, et enfin dans $\mathbf{Q}[X]$,
4. $X^4 - j$ dans $\mathbf{C}[X]$, où $j = \exp(2\imath\pi/3)$.
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.