Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013
Cursus préparatoire, semestre 2 : algèbre

Feuille d'exercices numéro 1
ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbf{Z}$

Exercice 1.1 PGCD
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On considère les ensembles $E = \{ax + by \text{ t.q. } x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$ et $E^+ = E \cap \mathbf{N}^*$.

1. Montrer que E^+ admet un plus petit élément, que l'on note d.
2. Montrer que E est égal à $d\mathbf{Z}$ (l'ensemble des multiples de d).
3. Montrer que d est le plus grand commun diviseur (PGCD) de a et b, c'est-à-dire que
   (a) d est un diviseur de a et de b,
   (b) Si $d' \in \mathbf{N}^*$ est un diviseur de a et de b, alors d' est un diviseur de d, et $d' \leqslant d$.

On note $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$. On a démontré le théorème de Bezout : il existe des entiers relatifs x, y tels que $ax + by = \mathrm{PGCD}(a, b)$.

Exercice 1.2 L'algorithme d'Euclide
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. Montrer que l'algorithme suivant permet de calculer $\mathrm{PGCD}(a, b)$.

Initialiser deux variables annexes `u:=a, v:=b`
Tant que `v est différent de zéro, faire :`
`z:=v`
`q:=E(u/v)` ici, `E` représente la partie entière
`v:=u - q * v` ici, `*` représente le produit des entiers
`u:=z`
fin du tant que
renvoyer `u`.

Calculer $\mathrm{PGCD}(389, 167)$, $\mathrm{PGCD}(726, 275)$ et $\mathrm{PGCD}(237, 81)$.

Question subsidiaire : Si on suppose que $|a| \leqslant n$ et $|b| \leqslant n$, comment majorer le nombre d'étapes effectuées par l'algorithme d'Euclide en fonction de n ?

Exercice 1.3 PPCM
Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, et F l'ensemble des entiers strictement positifs qui sont à la fois des multiples de a et b. Montrer que F admet un plus petit élément m, et que $F = m\mathbf{N}^*$. On dit que m est le plus petit commun multiple (PPCM) de a et b, et on note $m = \mathrm{PPCM}(a, b)$.

Exercice 1.4
Soit n un entier. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^2 par 8 ?

Exercice 1.5
Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs dont le PGCD est 35 et le PPCM est 210.

Exercice 1.6
Soient a et b deux entiers strictement positifs tels que $a^2 + b^2 = 5409$ et $\mathrm{PPCM}(a, b) = 360$.

1. Déterminer $\mathrm{PGCD}(a, b)$.
2. Déterminer a et b.

Exercice 1.7 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a $7 | (3^{2n} - 2^n)$

Exercice 1.8 Soit $a \in \mathbf{Z}$ tel que $(a+1)|(a^2+1)$. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

Exercice 1.9

1. Soit n un entier positif. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n^3 par 7 ?
2. Existe-t-il des couples (x, y) d'entiers positifs tels que $7x - 4y^3 = 1$?

Exercice 1.10

Montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ n'admet pas de solutions entières (x, y, z).

Exercice 1.11

On se propose de déterminer tous les couples (m, n) d'entiers naturels vérifiant l'équation

$$2^m - 3^n = 1 \tag{1}$$

1. Soit $k \geqslant 1$ un entier.
   (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
   (b) Déterminer successivement les restes de la division euclidienne de 3^{2k+1} par 8, puis de $3^{2k+1}+1$ par 8.
2. Soit (m, n) un couple de solutions de (1). Montrer que $m \leqslant 2$.
3. Résoudre (1).

Exercice 1.12

1. Montrer que $3^{512} - 2^{256}$ est un multiple de 7.
2. Montrer que $2^{70} + 3^{70}$ est un multiple de 13.

Exercice 1.13

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

Exercice 1.14

Montrer que 7 divise $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

Exercice 1.15

Soit x un réel tel que pour tout entier $k \geqslant 2$, le nombre réel x^k soit entier. Montrer que x est un entier.

Exercice 1.16

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il existe n entiers consécutifs non premiers.

Exercice 1.17

Soit n un entier avec $n \geqslant 7$. Montrer que $n(n^2 - 49)(n^2 + 49)$ est un multiple de 30.

Exercice 1.18

Soient x et y deux entiers. Montrer l'équivalence

$$3x \equiv 7y\ [11] \Leftrightarrow x \equiv 6y[11].$$

Exercice 1.19

1. Soit $a \geqslant 0$ un entier. Montrer que pour tout entier $k > 0$, on a
$$(a-1)^{2^k} + 1 \equiv 2\,[a].$$
2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour tout entier $k > 0$, on a
$$(F_n - 1)^{2^k} + 1 = F_{n+k}.$$
   En déduire qu'il existe un entier $q > 0$ tel que $F_{n+k} = qF_n + 2$.
3. Soient $m > 0$ et $n > 0$ deux entiers distincts. Montrer que F_m et F_n sont premiers entre eux.