**Lemme 6.27.** Soit $T \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inférieure. Soit $X \in S_T$ qu'on écrit $X = X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$. Alors pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ il existe $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* Dans la suite on notera $a_{ij}$ les coefficients de la matrice $T$. Notons que la forme triangulaire inférieure de la matrice fait que notre système va avoir la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) \\ x_3'(t) = a_{31}x_1(t) + a_{32}x_2(t) + a_{33}x_3(t) \\ \vdots \end{cases}$$

On va faire la preuve par récurrence sur $k$. On traite d'abord le cas $k = 1$.
On a donc $x_1'(t) = a_{11}x_1(t)$. On connaît la solution générale d'une telle équation et on a donc l'existence de $c_1 \in \mathbb{C}$ tel pour tout $t$, $x_1(t) = c_1 e^{ta_{11}}$.
D'autre part

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ta_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ta_{11}}c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent le résultat est vrai pour $k = 1$.
On le suppose vraie pour un $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
On a

$$(E) \qquad x_{k+1}'(t) = \underbrace{a_{k+1,1}x_1(t) + \cdots + a_{k+1,k}x_k(t)}_{b(t)} + a_{k+1,k+1}x_{k+1}(t).$$

Notons que l'hypothèse de récurrence nous donne une expression de $x_1, \dots, x_k$ en fonction de certains $c_1, \dots, c_k$ ainsi l'équation $(E)$ peut se réécrire sous la forme

$$z'(t) = a_{k+1,k+1}z(t) + b(t)$$

et $b$ est fixée par l'hypothèse de récurrence.
Notons $(H)$ l'équation homogène associée : $z'(t) = a_{k+1,k+1}z(t)$. L'équation $(H)$ a pour solution générale

$$z(t) = c_{k+1}e^{ta_{k+1,k+1}}$$

où $c_{k+1} \in \mathbb{C}$. Nous allons déterminer une solution particulière de $(E)$ ce qui donnera la solution générale de $(E)$.

Pour cela on introduit quelques notations. Pour $t \in \mathbb{R}$, on notera $C(t) = e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que $C'(t) = TC(t)$ et l'hypothèse de récurrence devient $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

De plus, pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on notera $L_j = (0 \cdots 0\ 1\ 0 \cdots 0) \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$ la matrice ligne où le 1 est en position $j$. On remarque alors qu'étant donnée une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, on a $L_j \cdot M \in M_{1\times n}(\mathbb{C})$ et c'est la ligne $j$ de $M$.

Soit $y$ définie par

$$y(t) = L_{k+1} \cdot C(t).$$

On a alors

$$\begin{aligned}
y'(t) &= L_{k+1} \cdot T \cdot C(t) \\
&= \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot C(t) \\
&= \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix} \right] \cdot C(t) \\
&= \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C(t) \\
&\quad + \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix} \cdot C(t)
\end{aligned}$$

Notons $\alpha$ et $\beta$ les deux termes obtenus. Le premier terme est

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{k+1,1}x_1(t) + \cdots a_{k+1,k}x_k(t).$$

Le deuxième terme est

$$\beta = \sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1,j} L_j \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix} \cdot C(t).$$

Or on a dit plus haut que $L_j \cdot M$ est la ligne $j$ de $M$. Ici on constate que si $j \leq k$, ça donne 0 et donc seul le terme $L_{k+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$ subsiste et de plus $L_{k+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix} = L_{k+1}$ (car c'est la ligne $k+1$ de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$). Par conséquent

$$\beta = a_{k+1,k+1} L_{k+1} C(t) = a_{k+1,k+1} y(t).$$

Finalement on a

$$y'(t) = \alpha + \beta = a_{k+1,1}x_1(t) + \cdots a_{k+1,k}x_k(t) + a_{k+1,k+1}y(t)$$

ce qui signifie que $y$ est bien une solution particulière de l'équation $(E)$. Par conséquent $x_{k+1}$ s'écrit sous la forme

$$x_{k+1}(t) = c_{k+1}e^{ta_{k+1,k+1}} + y(t).$$

Il nous reste à vérifier l'égalité voulue (au rang $k+1$) avec $c_1, \ldots, c_{k+1}$. Avant ça, quelques remarques et quelques notations.

— Soit $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ et $p \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & \cdots & m_{pn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

— La matrice $e^{tT}$ est triangulaire inférieure comme $T$ (en effet, $e^{tT} = \sum (tT)^l/(l!)$ et une puissance d'une matrice triangulaire est triangulaire de la même forme). De plus étant donnée une matrice triangulaire $S$ dont les éléments diagonaux sont $s_1, \ldots, s_n$, la matrice $e^S$ est triangulaire et ses éléments diagonaux seront $e^{s_1}, \ldots e^{s_n}$.

— Pour $p = 1, \ldots, n$ on notera $E_p \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice contenant un 1 en position $(p,p)$ et des 0 partout ailleurs.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ c_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \left[ \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + E_{k+1} \right] e^{tT} \cdot \left[ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + E_{k+1} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + E_{k+1} \cdot e^{tT} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

. Notons, dans l'ordre, $X_1, X_2, X_3, X_4$ les quatre termes qui apparaissent. On a $Y_1 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour $Y_2$ on reconnait dans $E_{k+1}$ une matrice dont la ligne d'indice $k+1$ est $L_{k+1}$ or $L_{k+1}C(t) = y(t)$ donc $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $y(t)$ placé en position $k+1$.

Concernant $Y_3$, $e^{tT}$ est triangulaire inférieure et $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e^{tT}$ est égal (d'après les remarques ci-dessus) à la matrice issue de $etT$ dans laquelle on n'a gardé que les $k$ premières lignes ce qui entraine que le produit avec le vecteur colonne contenant $c_{k+1}$ en position $k+1$ est nul, i.e. $Y_3 = 0$.
Le produit $L_{k+1} \cdot M$ est une matrice ligne et c'est la ligne $k+1$ de $M$, on constate comme pour $Y_2$ que $E_{k+1} \cdot e^{tT}$ est une matrice dont la seule ligne non nulle est la ligne $k+1$ et cette ligne est égale à $L_{k+1} \cdot e^{tT}$. D'autre part la ligne $k+1$ de $e^{tT}$ est de la forme $(\star \ \cdots \ \star \ e^{ta_{k+1,k+1}} \ 0 \ \cdots \ 0)$ (voir les remarques ci-dessus sur l'exponentielle d'une matrice triangulaire). Par conséquent $Y_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{k+1}e^{ta_{k+1,k+1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

On obtient finalement $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{k+1}e^{ta_{k+1,k+1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ x_{k+1}(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $\square$