

On fixe pour tout le chapitre un corps \mathbb{K} .

I Matrice d'une application linéaire

1° L'espace des matrices

[...]

2° Matrice d'un vecteur

Définition. Soit E un espace vectoriel, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $v \in E$, on appelle *matrice de v dans \mathbf{e}* ou *colonne des coordonnées de v dans \mathbf{e}* la matrice-colonne $\text{Mat}_{\mathbf{e}}(v) = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ définie par :

$$v = \sum_{j=1}^n x_j e_j.$$

Lemme. Avec ces notations, l'application $\text{Mat}_{\mathbf{e}} : E \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ est un isomorphisme.

DÉMONSTRATION. Considérons l'application « combinaison linéaire » qui, à $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$, associe $\sum_{j=1}^n x_j e_j$: cette application est linéaire (vérifier !) et bijective car \mathbf{e} est une base. Eh bien, $\text{Mat}_{\mathbf{e}}$ en est la bijection réciproque.

3° Matrice d'une application linéaire

a) Construction de la matrice

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ des bases respectives de ces espaces et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On appelle *matrice de φ dans les bases \mathbf{e} et \mathbf{f}* et on note $\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{f}}(\varphi)$ la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ définie ainsi : la j -ème colonne de A est la colonne des coordonnées de l'image du j -ème vecteur. Plus précisément :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \text{Mat}_{\mathbf{f}}(\varphi(e_j)) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \text{i.e. : } \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i.$$

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathbf{I}_n la matrice $n \times n$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon. Soit de plus E un espace de dimension n et \mathbf{e} une base de E , on a : $\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}}(\text{Id}_E) = \mathbf{I}_n$.

b) Un isomorphisme

Proposition. Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ des bases respectives de ces espaces. L'application $\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{f}} : \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

L'idée, c'est qu'une application linéaire est déterminée par l'image d'une base et qu'une famille de n vecteurs est déterminée par n colonnes de coordonnées, que l'on peut regrouper dans une matrice.

DÉMONSTRATION. La linéarité de l'application $\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{f}}$ se vérifie avec quelque lourdeur mais sans difficultés. Elle est bijective en vertu des faits suivants : d'une part, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une unique famille (w_1, \dots, w_n) de F telle que la matrice de w_j dans \mathbf{f} est la j -ème colonne de A ; d'autre part, pour toute famille (w_1, \dots, w_n) de F , il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\varphi(e_j) = w_j$ pour tout j .

Corollaire. Pour E et F espaces de dimensions finie, on a : $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \dim(F)$.

c) Produit d'une matrice par un vecteur

Définition. Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^n$, on définit le produit $AX \in \mathbb{K}^m$ par :

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}.$$

Exercice. Avec les notations de la définition, l'application $\varphi_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $X \mapsto AX$ est linéaire. Si on munit \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^m des bases canoniques \mathbf{e} et \mathbf{f} , on a :

$$\text{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi_A) = A.$$

d) Calcul de l'image d'un vecteur

Proposition. La matrice de l'image d'un vecteur est le produit de la matrice par la matrice du vecteur. En symboles, soient E et F deux espaces vectoriels, \mathbf{e} et \mathbf{f} des bases respectives de ces espaces, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $A = \text{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$. Soient v dans E , $X = \text{Mat}_{\mathbf{e}}(v)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathbf{f}}(\varphi(v))$. Alors :

$$\text{Mat}_{\mathbf{f}}(\varphi(v)) = \text{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi) \text{Mat}_{\mathbf{e}}(v), \quad \text{i.e.} : Y = AX.$$

DÉMONSTRATION. Si $v = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, on a par linéarité :

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) f_i.$$

4° Composée et produit

a) Un calcul

Soient D , E et F trois espaces vectoriels de dimension finie, soient $\mathbf{d} = (d_k)_{1 \leq k \leq p}$, $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathbf{f} = (f_j)_{1 \leq j \leq m}$ des bases respectives de ces espaces, et soient $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(D, E)$ deux applications linéaires. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \text{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} = \text{Mat}_{\mathbf{d},\mathbf{e}}(\psi)$.

On cherche la matrice de $\varphi \circ \psi$ dans les bases \mathbf{d} et \mathbf{f} . Pour cela, on fixe $k \in \{1, \dots, p\}$ et on calcule $\varphi \circ \psi(d_k)$:

$$\varphi \circ \psi(d_k) = \varphi\left(\sum_{j=1}^n b_{jk} e_j\right) = \sum_{j=1}^n b_{jk} \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n b_{jk} \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} b_{jk} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\right) f_i.$$

b) Produit de matrices

Le calcul précédent rend naturelle la définition suivante.

Définition. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$; $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle *produit* de A par B la matrice $AB = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Mise en garde. Étant données $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, le produit AB n'est défini que si $r = n$: le nombre de lignes de A doit être égal au nombre de colonnes de B .

Même si $r = n$, le produit BA n'a de sens que si $p = m$.

Même si $r = n$ et $p = m$, les produits AB et BA ne sont de même taille que si $m = n = r = p$ (deux matrices carrées de même taille).

Même si $m = n = r = p$, les produits AB et BA sont en général différents.

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$.

Exemple. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\mathbf{I}_n A = A = A \mathbf{I}_n$.

Proposition. Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$; $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$; $B, B' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$; $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. Alors :

- (i) $(AB)C = A(BC)$;
- (ii) $(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B$ et $A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda AB + \lambda' AB'$.

DÉMONSTRATION. Laisée à la patience du lecteur.

c) Recollement de morceaux

Proposition (Matrice de la composée). La matrice de la composée est la composée des matrices. En symboles, si D (resp. E, F) a pour base \mathbf{d} (resp. \mathbf{e}, \mathbf{f}) et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(D, E)$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathbf{d},\mathbf{f}}(\varphi \circ \psi) = \text{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi) \text{Mat}_{\mathbf{d},\mathbf{e}}(\psi).$$

DÉMONSTRATION. Déjà faite!

5° Endomorphismes et matrices carrées

a) Un nouvel anneau

Lorsque les deux indices sont égaux, on note : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Corollaire. La somme et le produit de matrices font de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un anneau. (Le neutre de la somme est la matrice nulle 0 , le neutre du produit est l'identité \mathbf{I}_n .)

Exemple (Calcul intéressant!). Sachant que le parenthésage n'importe pas, on calcule :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Inversibilité

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est *inversible* s'il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $PQ = \mathbf{I}_n = QP$.

On note $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble¹ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions n et m et soient \mathbf{e} et \mathbf{f} des bases respectives de ces espaces, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $A = \text{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$. Alors, φ est bijective si et seulement si A est inversible. Cela ne peut se produire que si $m = n$.

DÉMONSTRATION. Soit $\psi : F \rightarrow E$ une application linéaire et $B = \text{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(\psi)$ sa matrice. On a vu les relations : $\text{Mat}_{\mathbf{f}}(\varphi \circ \psi) = AB$ et, symétriquement : $\text{Mat}_{\mathbf{e}}(\psi \circ \varphi) = BA$. Comme $\text{Mat}_{\mathbf{f}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(F, F)$ dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et que $\text{Mat}_{\mathbf{f}}(\text{Id}_F) = \mathbf{I}_m$, on a : $\varphi \circ \psi = \text{Id}_F$ si et seulement si $AB = \mathbf{I}_m$. De même : $\psi \circ \varphi = \text{Id}_E$ si et seulement si $BA = \mathbf{I}_n$. Ainsi, ψ est l'inverse de φ si et seulement si B est l'inverse de A .

1. En fait, c'est un groupe.

II Changement de base

1° Cas des vecteurs

a) Matrice de changement de base

Définition. Soit E un espace vectoriel ayant pour bases $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ et soit $P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}$ la matrice de passage de \mathbf{e} à \mathbf{e}' .

Remarque. Par définition de ces matrices, on a : $P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} = \text{mat}_{\mathbf{e}', \mathbf{e}}(\text{Id}_E)$. (Attention à l'inversion de l'ordre des bases !)

Lemme. Avec les notations ci-dessus, $P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}$ est inversible et on a : $P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} = P_{\mathbf{e}', \mathbf{e}}$.

DÉMONSTRATION. De $\text{Id}_E = \text{Id}_E \circ \text{Id}_E$, on tire : $\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathbf{e}', \mathbf{e}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}(\text{Id}_E)$, puis : $\mathbf{I}_n = P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} P_{\mathbf{e}', \mathbf{e}}$. En échangeant le rôle des bases, il vient : $\mathbf{I}_n = P_{\mathbf{e}', \mathbf{e}} P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}$.

L'observation suivante sera commode (pas vue en amphï).

Lemme. Soient E un espace vectoriel de dimension n , \mathbf{e} une base de E et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique base \mathbf{e}' de E telle que $P = P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}$.

DÉMONSTRATION. Considérons l'application linéaire $\psi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{e}}(\psi) = P$. Comme P est inversible, ψ est un isomorphisme : par suite, l'image de la base \mathbf{e} est une base \mathbf{e}' de E . Or, $\text{Mat}_{\mathbf{e}}$ est un isomorphisme de E sur \mathbb{K}^n qui envoie \mathbf{e}' sur les colonnes de P . Par suite, on a : $P = P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}$. L'unicité d'une telle base est évidente car la matrice de passage détermine les coordonnées des vecteurs de \mathbf{e}' dans \mathbf{e} .

Remarque. Il est amusant de voir que l'on joue sur deux interprétations de P : comme matrice d'une application non triviale dans une base \mathbf{e} et comme matrice de l'application triviale Id_E dans les bases \mathbf{e}' et \mathbf{e} .

b) Formule de changement de base

Proposition. Soit E un espace vectoriel ayant pour bases $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ et soit $P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}$ la matrice de passage de \mathbf{e} à \mathbf{e}' . Soit v un vecteur de E et soient $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} = \text{Mat}_{\mathbf{e}}(v)$ et $X' = (x'_i)_{1 \leq i \leq n} = \text{Mat}_{\mathbf{e}'}(v)$. Alors, on a :

$$\text{Mat}_{\mathbf{e}}(v) = P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} \text{Mat}_{\mathbf{e}'}(v), \quad \text{i.e. : } X = PX'$$

DÉMONSTRATION. On a : $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$ et, pour tout j : $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$, avec $P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'} = (p_{ij})$. On remplace :

$$v = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_{ij} x'_j e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) e_i.$$

Par unicité de l'écriture de v comme combinaison linéaire de \mathbf{e} , on trouve : $x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j$ pour tout i , ce qui donne : $X = PX'$ comme souhaité.

2° Cas des applications linéaires

Proposition. Soit E (resp. F) un espace vectoriel ayant pour bases $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ (resp. $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ et $\mathbf{f}' = (f'_1, \dots, f'_m)$). Soient $P = P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}$ et $Q = P_{\mathbf{f}, \mathbf{f}'}$ les matrices de passage. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \text{Mat}_{\mathbf{e}, \mathbf{f}}(\varphi)$ et

$A' = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \text{Mat}_{\mathbf{e}', \mathbf{f}'}(\varphi)$. Alors, on a :

$$A = QA'P^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. On écrit la matrice de φ dans les bases \mathbf{e}' et \mathbf{f} en partant de l'évidence : $\varphi = \text{Id}_F \circ \varphi = \varphi \circ \text{Id}_E$. On note en indice la base dans laquelle on va écrire la matrice :

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathbf{e}'} & \xrightarrow{\varphi} & F_{\mathbf{f}'} \\ \text{Id}_E \downarrow & \searrow \varphi & \downarrow \text{Id}_F \\ E_{\mathbf{e}} & \xrightarrow{\varphi} & F_{\mathbf{f}} \end{array}$$

Il vient, puisque la matrice de la composée est le produit des matrices :

$$\text{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{f}}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{f}}(\text{Id}_F) \text{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{f}'}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi) \text{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}(\text{Id}_E),$$

puis, vu que $\text{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{f}}(\text{Id}_F) = P_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}$ et $\text{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}(\text{Id}_E) = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$:

$$QA' = AP.$$

III Rang [traité un peu rapidement en amphi]

1° Rang d'une matrice

Définition. Soient m et n deux entiers et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note φ_A l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \varphi_A : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

On appelle *noyau* de A et on note $\text{Ker}(A)$ le noyau de φ_A ; on appelle *image* et on note $\text{Im}(A)$ l'image de φ_A ; enfin, on appelle *rang* de A et on note $\text{rg}(A)$ le rang de φ_A .

Remarque. Le noyau de A est l'ensemble des $X \in \mathbb{K}^n$ solutions du système $AX = 0$. L'image est l'ensemble des AX lorsque X décrit \mathbb{K}^n . On vérifie que AX est la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n x_j C_j$ des colonnes C_j de A . Ainsi, l'image de A est l'espace engendré par les colonnes de A et le rang de A est sa dimension.

Lemme. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : A est inversible SSI $\text{Ker } A = \{0\}$ SSI $\text{rg}(A) = n$.

DÉMONSTRATION. On a : $\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi_A)$ et φ_A est bijective si et seulement si A est inversible.

2° Rang d'une matrice et d'une application linéaire

Proposition. Soient E et F deux espaces vectoriels, \mathbf{e} et \mathbf{f} des bases respectives de ces espaces, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $A = \text{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$. Alors : l'application linéaire $\text{Mat}_{\mathbf{e}}$ (resp. $\text{Mat}_{\mathbf{f}}$) est un isomorphisme de $\text{Ker } \varphi$ sur $\text{Ker } A$ (resp. de $\text{Im } \varphi$ sur $\text{Im } A$). En particulier, on a :

$$\text{rg } \varphi = \text{rg } A.$$

DÉMONSTRATION. Soit $v \in E$ et $X = \text{Mat}_{\mathbf{e}}(v)$. Puisque $\text{Mat}_{\mathbf{f}}(\varphi(v)) = AX$ et que $\text{Mat}_{\mathbf{f}}$ est injective, on a une équivalence : $\varphi(v) = 0$ si et seulement si $AX = 0$, c'est-à-dire : $v \in \text{Ker } \varphi$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathbf{e}}(v) \in \text{Ker } A$.

D'autre part, l'image de φ est engendrée par les $\varphi(e_j)$ ($1 \leq j \leq n$) et l'image de A est engendrée par les colonnes de A , qui sont par définition les $\text{Mat}_{\mathbf{f}}(\varphi(e_j))$ ($1 \leq j \leq n$). Comme l'application $\text{Mat}_{\mathbf{f}}$ est un isomorphisme, elle envoie l'image de φ sur l'image de A . (Pourquoi?)

Corollaire. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_m(\mathbb{K})$. Alors :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(Q^{-1}AP).$$

DÉMONSTRATION. Soient \mathbf{e} et \mathbf{f} les bases canoniques de $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^m$. Soient \mathbf{e}' et \mathbf{f}' les bases de E et F telles que $P = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ et $Q = P_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}$. Par la formule de changement de base, $A' = Q^{-1}AP$ est la matrice de φ_A dans \mathbf{e}' et \mathbf{f}' . Par la proposition précédente, on a donc : $\text{rg } A = \text{rg } \varphi_A = \text{rg } A'$.

3° Version matricielle du théorème du rang [non traité]

Théorème (hors programme). Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. Il existe des matrices inversibles P et Q et un entier $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, r est le rang de A .

DÉMONSTRATION. Soit \mathbf{e} (resp. \mathbf{f}) la base canonique de \mathbb{K}^n (resp. \mathbb{K}^m), soit (e'_1, \dots, e'_r) une base d'un supplémentaire de $\text{Ker}(A)$ et soit (e'_{r+1}, \dots, e'_n) une base de $\text{Ker}(A)$. Soit $f'_j = \varphi_A(e'_j)$ pour j entre 1 et r . Par la « version abstraite » du théorème du rang, la famille (f'_1, \dots, f'_r) est une base de $\text{Im } \varphi_A$. On la complète en une base \mathbf{f}' de \mathbb{K}^m . Par construction de ces bases, la matrice de φ_A dans les bases \mathbf{e}' et \mathbf{f}' est celle qui apparaît dans le théorème. En posant $P = P_{\mathbf{e}, \mathbf{e}'}$ et $Q = P_{\mathbf{f}, \mathbf{f}'}$, la formule de changement de base permet alors de conclure.

Corollaire. Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

DÉMONSTRATION. Exercice instructif.

IV Systèmes et opérations sur les rangées

1° Étude abstraite des systèmes linéaires

On donne m et n entiers et un système de m équations à n inconnues : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m = \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$. On cherche les $X \in \mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $AX = B$.

On considère à nouveau l'application $\varphi_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, X \mapsto AX$.

a) Première discussion

On distingue deux cas :

1. soit $B \notin \text{Im } \varphi_A$: alors, le système n'a pas de solution ;
2. soit $B \in \text{Im } \varphi_A$: alors il existe un élément $X_1 \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX_1 = B$; mais alors, on a équivalence :

$$\begin{aligned} AX = B &\iff AX = AX_1 \iff A(X - X_1) = 0 \iff X - X_1 \in \text{Ker}(A) \\ &\iff \exists X_0 \in \text{Ker}(A), X = X_1 + X_0. \end{aligned}$$

Cela traduit la relation² :

$$\boxed{\text{SGEASM} = \text{SPEASM} + \text{SGESSM}.}$$

On dit que l'ensemble des solutions est un *espace affine* : c'est l'image d'un sous-espace vectoriel (ici, $\text{Ker}(A)$) par une translation (ici, $X \mapsto X + X_1$).

La situation est évidemment réminiscente des équations différentielles linéaires que l'on travaille en analyse ces temps-ci. Et pour cause : elles sont linéaires !

b) Deuxième discussion

On distingue deux cas :

1. soit A est carrée et inversible : alors, pour tout second membre B , il existe une unique solution : $AX = B$ équivaut à : $X = A^{-1}B$;
2. soit A est carré et non inversible : alors :

2. Où SGEASM = solution générale de l'équation avec second membre ; SPEASM = solution particulière de l'équation avec second membre ; SGESSM = solution générale de l'équation sans second membre.

- si $B \in \text{Im}(A)$ (cela existe), il y a strictement plus d'une solution (et même une infinité dès que le corps \mathbb{K} est infini);
 - si $B \notin \text{Im}(A)$ (cela existe), il n'y a aucune solution;
3. soit A n'est pas carrée (alors elle n'est pas inversible) : il existe des valeurs de B pour lesquelles le système n'admet pas de solutions ou alors il en admet strictement plus d'une (et même une infinité dès que le corps \mathbb{K} est infini).

2° Opérations sur les rangées

a) Matrices des opérations élémentaires

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note \mathbf{I}_p la matrice identité d'ordre p , $E_{i,j}^{(p)}$ la matrice $p \times p$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 et les autres 0. On considère les matrices $p \times p$ suivantes (D pour dilatation, T pour transvection, P pour permutation) :

$$\begin{aligned}
 1 \leq i \leq p, \quad \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0 \quad D_i^{(p)}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & & & \\ & \alpha & & \\ & & \mathbf{I}_{p-i-1} & \\ & & & \end{pmatrix}; \\
 1 \leq i \neq j \leq p, \quad \lambda \in \mathbb{K} \quad T_{i,j}^{(p)}(\lambda) &= \mathbf{I}_p + \lambda E_{i,j}^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \text{ en position } (i, j)); \\
 1 \leq i < j \leq p \quad P_{i,j}^{(p)} = P_{j,i}^{(p)} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & & & \\ & 0 & \dots & 1 \\ & & \mathbf{I}_{j-i-1} & \\ & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \mathbf{I}_{p-j-1} \end{pmatrix} \quad (\text{les } 1 \text{ en } (i, j) \text{ et } (j, i)).
 \end{aligned}$$

Exercice. Montrer que ces matrices sont inversibles. Plus précisément : $D_i^{(p)}(\alpha)^{-1} = D_i^{(p)}(\alpha^{-1})$; $T_{i,j}^{(p)}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}^{(p)}(-\lambda)$; $(P_{i,j}^{(p)})^{-1} = P_{i,j}^{(p)}$. (Commencer par $p = 2$.)

Exercice. Dans l'esprit du « calcul intéressant » ci-dessus, montrer que l'on a :

$$D_i(-1)T_{i,j}(-1)T_{j,i}(1)T_{i,j}(-1) = P_{i,j}.$$

b) Presque-définition des opérations élémentaires

On se donne aussi une matrice A de taille $m \times n$. On note $(L_i)_{1 \leq i \leq m}$ ses lignes $(C_j)_{1 \leq j \leq n}$ ses colonnes. Une opération typique consiste à multiplier la i -ème ligne de A par α , ce que l'on notera : $L_i \leftarrow \alpha L_i$.

Exemple ($m = n = 2$). On peut réaliser ces opérations élémentaires par des produits matriciels.

$$\begin{aligned}
 L_2 \leftarrow \alpha L_2 : \quad C_2 \leftarrow \alpha C_2 : \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ c & \alpha d \end{pmatrix}, \\
 L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 : \quad C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1 : \\
 \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + \lambda a \\ c & d + \lambda c \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

