Chapitre 27 - Déterminants

Comme sur tous les objets mathématiques importants, le déterminant a plusieurs interprétations possibles, et sa théorie peut être présentée de diverses façons.

L'idée qu'il me semble la première à connaître est que le déterminant est lié aux volumes : le déterminant d'une application linéaire u de $\mathbf{R}^n$ vers $\mathbf{R}^n$ (ou plus exactement sa valeur absolue) est la quantité par laquelle u multiplie les volumes.

La théorie sera plus facile à écrire pour des matrices carrées, on passera aux applications linéaires dans la dernière ligne droite.

1 - Matrices-transvections

Tous les calculs que nous allons voir exécuter sur les déterminants sont basés sur des manipulations simples sur les lignes et les colonnes de matrices, celles même qu'on a déjà vu en usage pour résoudre les systèmes par la méthode du pivot.

Formaliser un peu ces transformations se révèlera donc rentable.

Notation 27-1-73 : Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$ et λ un scalaire, on note $M_{ij}(\lambda) = I + \lambda E_{ij}$ (où on rappelle que la notation E_{ij} désigne la matrice élémentaire pour l'emplacement (i, j)).

Définition 27-1-211 : Ces matrices $M_{ij}(\lambda)$ (pour $\lambda \neq 0$) seront appelées **matrices-transvections**.

L'utilité de ces matrices-transvections est qu'elles formalisent les bidouillages qu'on sait pratiquer sans leur aide, mais qu'on aurait du mal à utiliser dans des preuves vérifiables sans cette nouvelle notation auxiliaire.

Affirmation : pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice $B = A \times M_{ij}(\lambda)$ s'obtient à partir de A de la façon suivante : on note C_i et C_j les i-ème et j-ème colonnes de A ; les colonnes de B sont identiques à celles de A sauf la j-ème qui vaut $C_j + \lambda C_i$; la matrice $B_1 = M_{ij}(\lambda) \times A$ s'obtient à partir de A de la façon suivante : on note L_i et L_j les i-ème et j-ème lignes de A ; les lignes de B_1 sont identiques à celles de A sauf la i-ème qui vaut $L_i + \lambda L_j$.

Vérification : C'est la simple application de la définition du produit de deux matrices, et l'interprétation de la phrase française qui précède...

On utilisera aussi plus occasionnellement une matrice moins technique que $M_{ij}(\lambda)$.

Notation 27-1-74 : Pour $1 \leq i \leq n$, on note $D_i(\lambda)$ et λ un scalaire, on note $D_i(\lambda)$ la matrice diagonale dont tous les termes diagonaux valent 1 sauf le (i, i)-ème qui vaut λ (si on préfère les formules, on écrira : $D_i(\lambda) = I - E_{ii} + \lambda E_{ii}$).

Affirmation : pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice $B = A \times D_i(\lambda)$ s'obtient à partir de A de la façon suivante : on note C_i la i-ème colonne de A ; les colonnes de B sont identiques à celles de A sauf la i-ème qui vaut λC_i ;la matrice $B_1 = D_i(\lambda) \times A$ s'obtient à partir de A de la façon suivante : on note L_i la i-ème ligne de A ; les lignes de B_1 sont identiques à celles de A sauf la i-ème qui vaut λL_i.

Vérification : C'est encore la simple application de la définition de la multiplication matricielle.

Les lemmes suivants concernant les matrices-transvections nous seront utiles.

Lemme 27-1-14 : Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$ et λ et μ deux scalaires.

$$M_{ij}(\lambda) \times M_{ij}(\mu) = M_{ij}(\lambda + \mu).$$

Démonstration : Remarquons (simple calcul...) que $E_{ij}^2 = 0$. On en déduit que :

$$M_{ij}(\lambda) \times M_{ij}(\mu) = (I + \lambda E_{ij})(I + \mu E_{ij}) = I + (\lambda + \mu)E_{ij} + 0 = M_{ij}(\lambda + \mu).$$

•

Corollaire 27-1-7 : Toute matrice-transvection est inversible, et son inverse est une matrice-transvection.

Démonstration : L'inverse de $M_{ij}(\lambda)$ est $M_{ij}(-\lambda)$.

•

Lemme 27-1-15 : Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$ et λ et μ deux scalaires non nuls,

$M_{ij}(\lambda)$ et $M_{ij}(\mu)$ sont semblables

Démonstration : Simple vérification (pénible...). Le lecteur méticuleux vérifiera qu'en posant $P = D_i(\lambda/\mu)$, inversible d'inverse $P^{-1} = D_i(\mu/\lambda)$, on a bien $P^{-1}M_{ij}(\lambda)P = M_{ij}(\mu)$.

•

Nous allons maintenant voir que toute matrice peut être ramenée à la forme diagonale par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Pour les besoins des preuves qui suivent, mélanger des bidouillages sur les lignes et les colonnes n'est pas gênant, et l'énoncé obtenu est par voie de conséquence très simple.

Lemme 27-1-16 : Soit $n \geq 0$ un entier. Pour toute matrice carrée (n, n) A, il existe une matrice diagonale D et des matrices-transvections $S_1, \ldots, S_k$, $T_1, \ldots, T_l$ telles que

$$A = S_1 S_2 \cdots S_k D T_l \cdots T_2 T_1.$$

Démonstration : C'est une récurrence sur n.

* Pour $n = 0$ (ou en commençant à $n = 1$ si on trouve les matrices vides trop effrayantes), c'est évident : la matrice A est directement diagonale.

* Soit $n \geq 2$ fixé, et supposons le théorème vrai pour toute matrice $(n-1, n-1)$. Soit A une matrice (n, n).

* Premier cas : si la première ligne et la première colonne de A sont toutes deux nulles, à l'exception possible du coefficient a_{11}.

Dans ce cas, A s'écrit par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où B est une matrice carrée $(n-1, n-1)$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à B et écrire

$$B = S'_1 S'_2 \cdots S'_k D' T'_l \cdots T'_2 T'_1$$

pour une D' diagonale et des S' et T' matrices-transvections. Prolongeons alors chaque S', chaque T' et D' en une matrice (n, n) en posant :

$$S_i = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & S'_i \end{array}\right) \quad D = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array}\right) \quad T_i = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & T'_i \end{array}\right).$$

Les matrices ainsi construites sont respectivement des matrices-transvections et une matrice diagonale, et le produit $B = S_1 S_2 \cdots S_k D T_l \cdots T_2 T_1$ vaut bien A (simple calcul par blocs).

* Second cas : si certains a_{i1} $(1 \leq i \leq n)$ ou certains a_{1j} ne sont pas nuls.

* Premier sous-cas : si $a_{11} \neq 0$. Dans ce sous-cas, en ajoutant à chaque colonne un multiple approprié de la première colonne, on peut tuer tous les a_{1j} (par exemple pour tuer a_{12}, on ajoutera à la deuxième colonne la première multipliée par $-a_{12}/a_{11}$). De la même façon, par des opérations sur les lignes, on pourra tuer tous les a_{i1}. En termes matriciels, la matrice

$$A' = M_{n1}(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}) \cdots M_{31}(-\frac{a_{31}}{a_{11}}) M_{21}(-\frac{a_{21}}{a_{11}})\, A\, M_{12}(-\frac{a_{12}}{a_{11}}) M_{13}(-\frac{a_{13}}{a_{11}}) \cdots M_{1n}(-\frac{a_{1n}}{a_{11}})$$

est de la forme traitée au premier cas ; on peut donc la décomposer en produit de matrices-transvections et de matrice diagonale ; puis en écrivant que

$$A = M_{21}(\frac{a_{21}}{a_{11}}) M_{31}(\frac{a_{31}}{a_{11}}) \cdots M_{n1}(\frac{a_{n1}}{a_{11}})\, A'\, M_{1n}(\frac{a_{1n}}{a_{11}}) \cdots M_{13}(\frac{a_{13}}{a_{11}}) \cdots M_{12}(\frac{a_{12}}{a_{11}})$$

on obtient bien une décomposition de A.

* Deuxième sous-cas : si $a_{11} = 0$. Comme on a supposé un autre des coefficients de la première ligne (ou de la première colonne) disons a_{1j} non nul, il suffit d'ajouter préalablement cette j-ème colonne à la première pour être ramené au premier sous-cas.

Le lemme est donc vrai pour toutes les matrices (n, n), ce qui clôt la récurrence.

•

2 - La définition

Définition 27-2-212 : Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif et $n \geq 0$ un entier. On appelle **déterminant** toute application $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \to \mathbf{K}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :
(i) Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(AB) = f(A)f(B)$.
(ii) Pour toute matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(D)$ est le produit des termes diagonaux de D.

Avec si peu de connaissances, il est déjà possible de montrer un résultat très simple

Proposition 27-2-134 : Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif et $n \geq 0$ un entier ; soit det un déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\det A = \det B$.

Démonstration : On notera que selon l'usage on omettra le plus souvent les parenthèses pour écrire $\det A$ au lieu de $\det(A)$.

Remarquons tout d'abord que comme I est diagonale, on sait calculer $\det I = 1$.

Soit alors P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Alors $\det B = \det P^{-1} {\cdot} \det A {\cdot} \det P = \det P^{-1} {\cdot} \det P {\cdot} \det A = \det P^{-1}P \cdot \det A = \det I \cdot \det A = \det A$.

Le gros morceau du chapitre sera de montrer le

Théorème 27-2-56 : Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif et $n \geq 0$ un entier. Il existe sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ un et un seul déterminant.

La démonstration va reposer sur la possibilité prouvée à la section précédente d'écrire toute matrice à partir de matrices diagonales et de matrices-transvections. On sait déjà calculer le déterminant des matrices diagonales, par définition ; on saura très bientôt calculer celui des matrices-transvections. On saura donc calculer celui de toutes les matrices, ce qui prouvera l'unicité du déterminant. Pour l'existence, il faut sortir une formule de sa manche...

3 - Déterminant et matrices inversibles

Proposition 27-3-135 : Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif et $n \geq 0$ un entier. Soit det un déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$A \text{ est inversible} \iff \det A \neq 0.$$

Démonstration :
* Preuve de $\Rightarrow$. Supposons A inversible. On a $1 = \det I = \det A \cdot \det A^{-1}$ donc $\det A \neq 0$ (et accessoirement son inverse est $\det A^{-1}$).
* Preuve de $\Leftarrow$ (par contraposition). Supposons A non inversible. Soit $r < n$ son rang. Comme dans le chapitre "matrices", introduisons la matrice (n,n) J_r dont les coefficients a_{ij} sont définis par $a_{ii} = 1$ pour $1 \leq i \leq r$ et $a_{ij} = 0$ pour tous les autres coefficients. Remarquons que J_r est diagonale, donc on sait calculer son déterminant, et on trouve 0 (elle contient des termes nuls sur la diagonale, puisque $r < n$). Comme A est de même rang que J_r, A est équivalente à J_r ; introduisons des matrices inversibles P et Q telles que $A = Q^{-1}J_rP$. Alors $\det A = \det Q^{-1} \cdot \det J_r \cdot \det P = \det Q^{-1} \cdot 0 \cdot \det P = 0$.
•

4 - Déterminants des matrices-transvections

Proposition 27-4-136 : Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif et $n \geq 0$ un entier, et soit det un déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$ et tout scalaire λ, $\det M_{ij}(\lambda) = 1$.

Démonstration : Notons tout d'abord que si $\lambda = 0$, $M_{ij}(\lambda) = I$ et le résultat est évident, on pourra donc supposer $\lambda \neq 0$.

Écrivons l'identité issue du premier lemme :

$$(E) \qquad (M_{ij}(\lambda))^2 = M_{ij}(2\lambda)$$

et notons $d = \det M_{ij}(\lambda)$.
* Premier cas : on est dans un corps où $2 \neq 0$.

Dans ce cas, on a aussi $2\lambda \neq 0$, donc d'après le second lemme, la matrice $M_{ij}(2\lambda)$ est semblable à $M_{ij}(\lambda)$ et a donc le même déterminant.

En appliquant det aux deux expressions liées par l'égalité *(E)* on obtient donc :

$$d^2 = d$$

soit $d^2 - d = 0$, soit $d(d-1) = 0$ donc d vaut 0 ou 1.

Comme $M_{ij}(\lambda)$ est inversible, $d \neq 0$. D'où $d = 1$.

* Second cas : on est dans un corps où $2 = 0$.

Les choses sont plus troublantes mais plus faciles, car l'identité *(E)* s'écrit alors plus simplement

$$(M_{ij}(\lambda))^2 = I$$

donc, en appliquant det on obtient :

$$d^2 = 1$$

soit $d^2 - 1 = 0$, soit $(d-1)(d+1) = 0$, soit $d = 1$ ou $d = -1$. Mais comme $2 = 0$, $1 = -1$, et donc là encore $d = 1$.

•

Preuve de l'unicité dans le théorème 27-2-56

Soit $\det_1$ et $\det_2$ deux déterminants sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Soit A une matrice (n,n).

Écrivons $A = S_1 S_2 \cdots S_k D T_l \cdots T_2 T_1$ pour D diagonale, et les S_i et T_j matrices-transvections. Alors $\det_1 A = \det_1 S_1 \det_1 S_2 \cdots \det_1 S_k \det_1 D \det_1 T_l \cdots \det_1 T_2 \det_1 T_1 = 1 \cdots 1 \cdots \det_1 D \cdot 1 \cdots 1 = \det_1 D$ est égal au produit des termes diagonaux de D. Il en est de même avec $\det_2$. D'où l'égalité des deux applications $\det_1$ et $\det_2$.

•

Maintenant que nous savons que le déterminant, s'il existe, est unique, nous parlerons "du" déterminant et le noterons det. On ne perdra pas de vue que nous ne savons pas encore que det existe ; les prochains énoncés ne sont donnés que sous réserve d'existence (mais comme on le construira dans quelques pages, tout ira bien).

5 - Opérations sur les colonnes

Notation 27-5-75 : Pour $C_1, \dots, C_n$ des matrices colonnes (chacune formée de n scalaires), on notera $\det(C_1, \dots, C_n)$ pour $\det A$, où A est la matrice carrée (n,n) dont les colonnes successives sont $C_1, \dots, C_n$.

Proposition 27-5-137 : Le déterminant ne change pas quand on ajoute à une colonne un multiple d'une (autre) colonne. Avec des formules, pour tout n, toutes matrices-colonnes $C_1, \dots, C_n$ à coefficients dans un même corps commutatif, tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ avec $i \neq j$ et tout scalaire λ

$$\det(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1, \cdots, C_{j-1}, C_j + \lambda C_i, C_{j+1}, \cdots, C_n).$$

Démonstration : Notons A la matrice carrée ayant pour colonnes $C_1, \dots, C_n$ et B celle ayant pour colonnes $C_1, \cdots, C_{j-1}, C_j + \lambda C_i, C_{j+1}, \cdots, C_n$.

D'après l'affirmation de la section précédente $B = A \times M_{ij}(\lambda)$. On en déduit que

$$\det B = \det A \cdot \det M_{ij}(\lambda) = \det A.$$

•

Proposition 27-5-138 : Le déterminant est multiplié par λ quand on multiplie une (seule) colonne par λ. Avec des formules : pour tout n, toutes matrices-colonnes $C_1, \dots, C_n$ à coefficients dans un même corps commutatif, tout $1 \leq i \leq n$ et tout scalaire λ

$$\lambda \det(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1, \cdots, C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n).$$

Démonstration : Notons A la matrice carrée ayant pour colonnes $C_1, \dots, C_n$ et B celle ayant pour colonnes $C_1, \cdots, C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n$.

D'après l'affirmation de la section précédente $B = A \times D_i(\lambda)$, donc $\det B = \det A \cdot \det D_i(\lambda) = \lambda \det A$.

•

Proposition 27-5-139 : Pour i fixé, le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne. Avec des formules : voir la proposition précédente pour la propriété multiplicative, et, par ailleurs, pour tout n, tout

i tel que $1 \leq i \leq n$, toutes matrices-colonnes $C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, C_n$, C'_i et C''_i à coefficients dans un même corps commutatif

$$\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C'_i + C''_i, C_{i+1}, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, C_n) + \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C''_i, C_{i+1}, C_n).$$

Démonstration : On distingue selon que le système de $n-1$ colonnes $(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, C_n)$ est libre ou non.
* Premier cas : si $(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, C_n)$ est lié.
Dans ce cas les trois matrices carrées ayant respectivement pour colonnes $(C_1, \ldots, C_{i-1}, C'_i + C''_i, C_{i+1}, C_n)$, $C_1, \ldots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, C_n)$ et $C_1, \ldots, C_{i-1}, C"'_i, C_{i+1}, C_n)$ ont chacune $n-1$ colonnes liées, donc *a fortiori* ont toutes leurs colonnes liées. Elles ne sont donc pas inveresibles, et leurs déterminants sont donc tous trois nuls, et la formule a prouver se réduit à $0 = 0 + 0$.
* Second cas : si $(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_{i+1}, C_n)$ est libre.
Le théorème de la base incomplète permet alors de le compléter en une base $(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, C_n)$ de l'espace $\mathcal{M}_{n1}$ des matrices-colonnes. Développons dans cette base les deux colonnes C'_i et C''_i, soit :

$$C'_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_k \qquad \text{et} \qquad C'_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k C_k.$$

On a alors $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_k, C_{i+1}, C_n)$.
Dans cette dernière expression, retranchons à la i-ème colonne $\lambda_1 C_1$, puis $\lambda_2 C_2, \ldots, \lambda_{i-1} C_{i-1}$, puis pour terminer $\lambda_{i+1} C_{i+1}, \ldots, \lambda_n C_n$.
Il reste $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, \lambda_i C_i, C_{i+1}, C_n) = \lambda_i \det(C_1, \ldots, C_n)$.
Le même calcul montre par ailleurs que $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C''_i, C_{i+1}, C_n) = \mu_i \det(C_1, \ldots, C_n)$ et enfin que $\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C'_i + C''_i, C_{i+1}, C_n) = (\lambda_i + \mu_i) \det(C_1, \ldots, C_n)$.
L'égalité annoncée est donc prouvée.

•

Remarque : On ne confondra pas cette propriété de linéarité "colonne par colonne" (la "multilinéarité" si on veut faire savant) avec la linéarité ordinaire ! Le déterminant n'est pas du tout une application linéaire. Pour A et B deux matrices carrées (n, n) sur un même corps commutatif, l'expression $\det(A + B)$ ne s'arrange en général absolument PAS, tandis que pour λ scalaire, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ (on fait sortir λ successivement de chaque colonne).
Proposition 27-5-140 : Quand on échange deux colonnes dans une matrice carrée, le déterminant change de signe. Avec des formules : pour tout n, toutes matrices-colonnes $C_1, \ldots, C_n$ à coefficients dans un même corps commutatif, tous indices i, j avec $1 \leq i < j \leq n$,

$$\det(C_1, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \cdots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n).$$

Démonstration : Calculons de deux façons le déterminant

$$\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + C_j, C_{i+1}, \cdots, C_{j-1}, C_i + C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n).$$

Dans un premier calcul, on constate que les colonnes numérotées i et j sont les mêmes, donc il s'agit du déterminant d'une matrice carrée non inversible, donc ce déterminant est nul.

Dans un deuxième calcul, on développe en utilisant les linéarités par rapport à la i-ème et par rapport à la j-ème colonne.

On obtient :

$$\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) +$$
$$\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) +$$
$$\det(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \cdots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) +$$

$$\det(C_1,\cdots,C_{i-1},C_j,C_{i+1},\cdots,C_{j-1},C_j,C_{j+1},\ldots,C_n).$$

Dans cette formule , les premier et quatrième déterminants sont tous deux nuls (encore la répétition de colonnes). On en déduit donc finalement que

$$0=\det(C_1,\cdots,C_{i-1},C_i,C_{i+1},\cdots,C_{j-1},C_j,C_{j+1},\ldots,C_n)+$$
$$\det(C_1,\cdots,C_{i-1},C_j,C_{i+1},\cdots,C_{j-1},C_i,C_{j+1},\ldots,C_n).$$

•

6 - Développement d'un déterminant par rapport à la première ligne

Définition 27-6-213 : Soit A une matrice à coefficients dans un corps commutatif. On appelle **mineurs** de A les déterminants des sous-matrices carrées de A.
Définition 27-6-214 : Soit A une matrice carrée (n,n) à coefficients dans un corps commutatif et $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$. Le **mineur associé à** (i,j) est le déterminant de la matrice carrée $(n-1,n-1)$ obtenue par ablation de la i-ème ligne et de la j-ème colonne de A.
Définition 27-6-215 : Soit A une matrice carrée (n,n) à coefficients dans un corps commutatif et $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$. Le **cofacteur associé à** (i,j) est obtenu en multipliant par $(-1)^{i+j}$ le mineur associé à (i,j).
Définition 27-6-216 : Soit A une matrice carrée (n,n) à coefficients dans un corps commutatif. La **comatrice** de A est la matrice formée des cofacteurs de A.
Notation 27-6-76 : La comatrice de A sera notée $\operatorname{com} A$.
Lemme 27-6-17 : Soit $m\leq n$ deux entiers, soit B une matrice carrée $(n-m,n-m)$ à coefficients dans un corps commutatif $\mathbf{K}$ et soit la matrice (n,n) qui s'écrit par blocs :

$$A=\left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

On a l'égalité $\det A=\det B$.
Démonstration : Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_{n-m}(\mathbf{K})$ par :

$$f(M)=\left|\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right|.$$

Pour M et N deux matrices de $\mathcal{M}_{n-m}(\mathbf{K})$, par multiplication par blocs des matrices,

$$\left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & MN \end{array}\right)$$

donc, en prenant les déterminants des trois termes, $f(M)f(N)=f(MN)$.

Par ailleurs lorsque $M=D$ est diagonale, la matrice $\left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$ est elle-même diagonale donc son déterminant est égal au produit de ses termes diagonaux. Ainsi $f(D)$ est égal au produit des termes diagonaux de D.
L'application f est donc le déterminant sur $\mathcal{M}_{n-m}(\mathbf{K})$.
En écrivant que $f(B)=\det B$ on obtient le résultat annoncé.

•

Lemme 27-6-18 : Soit B_1 et B_2 deux matrices ayant chacune $n-1$ lignes et ayant à elles deux $n-1$ colonnes à coefficients dans un même corps commutatif $\mathbf{K}$; notons B la matrice $(n-1,n-1)$ obtenue par juxtaposition côte à côte de B_1 et B_2 et soit la matrice (n,n) :

$$A=\left(\begin{array}{c|c|c} 0\cdots 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ \hline & 0 & \\ B_1 & \vdots & B_2 \\ & 0 & \end{array}\right).$$

En notant k l'indice de la colonne commençant par le 1, $\det A = (-1)^{k+1} \det B$.
Démonstration : Si $k = 1$, c'est le lemme précédent (quand $m = 1$). La démonstration se prête bien à écrire une récurrence sur k ; soit donc un k fixé, supposons le résultat vrai pour une colonne intermédiaire en k-ème position, et montrons le quand la colonne intermédiaire est en $k+1$-ème position, c'est-à-dire quand B_1 est formée de k colonnes. Dans ce contexte, notons X_k la k-ème colonne de B_1 et notons B_1' la matrice $(n-1, k-1)$ formée des $k-1$ premières colonnes de B_1. Avec ces notations,

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0\cdots 0 & 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ \hline & & 0 & \\ B_1' & X_k & \vdots & B_2 \\ & & 0 & \end{array}\right).$$

On sait que l'échange de deux colonnes change le signe du déterminant ; on obtient donc :

$$\det A = \left|\begin{array}{c|c|c|c} 0\cdots 0 & 0 & 1 & 0\cdots 0 \\ \hline & & 0 & \\ B_1' & X_k & \vdots & B_2 \\ & & 0 & \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{c|c|c|c} 0\cdots 0 & 1 & 0 & 0\cdots 0 \\ \hline & 0 & & \\ B_1' & \vdots & X_k & B_2 \\ & 0 & & \end{array}\right|.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient donc $\det A = -(-1)^k \det B = (-1)^{k+1} \det B$.

•

Théorème 27-6-57 : Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée (n, n) à coefficients dans un corps commutatif. Notons m_{ij} le mineur de A associé à (i, j). Alors :

$$\det A = a_{11}m_{11} - a_{12}m_{12} + a_{13}m_{13} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}m_{1n}.$$

Démonstration : Notons C_i la i-ème colonne de A (pour $1 \leq i \leq n$). Notons ensuite X_i le vecteur-colonne à n lignes obtenu en remplaçant le premier coefficient de C_i par un zéro (c'est à dire $X_i = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$) et notons enfin Y le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (avec n coefficients).

Avec ces notations, pour chaque i $(1 \leq i \leq n)$, $C_i = a_{1i}Y + X_i$.

Le déterminant $\det A = \det(C_1, \ldots, C_n) = \det(a_{11}Y + X_1, \ldots, a_{1n}Y + X_n)$ peut être développé en utilisant successivement la linéarité par rapport à chaque colonne. L'expression complète est alors une gigantesque sommation de 2^n termes. Mais dans la plupart de ces termes, Y apparaît au moins deux fois dans le déterminant. Dès lors qu'il y a répétition de colonnes, la matrice carrée correspondante n'est pas inversible et son déterminant est nul. La sommation s'allège donc indiciblement et il ne reste que l'expression

$$\det A = \det(X_1, \ldots, X_n) + a_{11}\det(Y, X_2, \ldots, X_n) + a_{12}\det(X_1, Y, X_3 \ldots, X_n) + \cdots + a_{1n}\det(X_1, \ldots, X_{n-1}, Y).$$

La matrice carrée obtenue par juxtaposition des colonnes $X_1, \ldots, X_n$ commence par une ligne de zéros : elle n'est donc pas inversible, et le premier terme dans la somme ci-dessus est lui aussi nul.

Enfin pour chaque i $(1 \leq i \leq n)$, la matrice carrée formée des colonnes $X_1, \ldots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \ldots, X_n$ a exactement la forme préparée par le lemme : son déterminant est donc $(-1)^{i+1}m_{1i}$.

Il reste donc précisément la formule annoncée.

•

Remarque : Avec les mêmes efforts et un peu de concentration sur les signes, on pourrait écrire une formule analogue pour développer un déterminant par rapport à n'importe quelle ligne. Cela ne me paraît pas indispensable, dans la mesure où un simple échange de lignes permet de ramener en haut la ligne intéressante (au prix d'un changement de signe du déterminant).

Définition 27-6-217 : On dira qu'une matrice carrée est **triangulaire inférieure** lorsque tous ses coefficients au-dessus de la diagonale principale (en formules : ceux des termes (i,j) avec $i<j$) sont nuls.
Corollaire 27-6-8 : Le déterminant de toute matrice triangulaire inférieure est égal au produit de ses termes diagonaux.
Démonstration : Simple récurrence sur la taille de la matrice : pour une matrice $(1,1)$ c'est évident ; pour une matrice $(n+1,n+1)$, la première ligne ne contenant qu'un terme non nul, le premier, le développement par rapport à la première ligne ramène aussitôt au calcul d'un déterminant de matrice triangulaire inférieure (n,n).

•

Proposition 27-6-141 : Soit A une matrice inversible. L'inverse de A est donné par la formule :

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}\,A.$$

Démonstration : Notons m_{ij} les mineurs de A et c_{ij} ses cofacteurs (pour $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq n$).
Notons B la matrice $\frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}\,A$: ainsi pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq n$, $b_{ij}=\frac{1}{\det A}c_{ji}$.
Calculons le produit $P=AB$.
Calculons

$$\begin{aligned}p_{11}&=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}\\&=\frac{1}{\det A}(a_{11}c_{11}+a_{12}c_{12}+\cdots+a_{1n}c_{1n})\\&=\frac{1}{\det A}(a_{11}m_{11}-a_{12}m_{12}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}m_{1n}).\end{aligned}$$

D'après la formule du développement du déterminant de A par rapport à la première ligne, $p_{11}=1$.
Calculons maintenant

$$\begin{aligned}p_{21}&=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots+a_{2n}b_{n1}\\&=\frac{1}{\det A}(a_{21}c_{11}+a_{22}c_{12}+\cdots+a_{2n}c_{1n})\\&=\frac{1}{\det A}(a_{21}m_{11}-a_{22}m_{12}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{2n}m_{1n}).\end{aligned}$$

On remarque alors que cette dernière parenthèse est la formule qui apparaît dans le développement par rapport à la première ligne du déterminant

$$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\dots&a_{3n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

et ce déterminant est nul (les deux premières lignes étant identiques) donc $p_{21}=0$.
On calculerait de même tous les p_{ij} mais la débauche d'indices me pousse à laisser le calcul "au lecteur" (d'autant qu'il utilise le développement par rapport à une ligne quelconque, dont j'ai fait remarquer que je pourrais l'écrire, mais que je n'ai pas écrit...)

•

7 - Existence du déterminant

Le moment est venu de prouver le théorème 27-2-56. Le principe est de définir une application par la formule de développement par rapport à la première ligne, et de vérifier que celle-ci est bien un déterminant. La formule appelant des déterminants plus petits –les mineurs qui y interviennent– la démonstration se fera raisonnablement par récurrence.

Démonstration du théorème 27-2-56

* Sur l'ensemble des matrices $(0,0)$, réduit à la matrice vide, la fonction constante valant 1 est "évidemment" un déterminant. Si ça ne vous convainc pas, commençons la récurrence à $n=1$: en posant $\det(a)=a$, on obtient manifestement un déterminant sur l'ensemble des matrices $(1,1)$.

* Soit $n \geq 2$ fixé. Supposons le théorème vrai sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ et démontrons le sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Pour ce faire, pour A matrice carrée (n,n), notons m_{ij} le mineur de A associé à (i,j) –ce mineur a un sens puisque le déterminant existe pour les matrices $(n-1,n-1)$. Définissons alors une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vers $\mathbf{K}$ en posant, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:

$$f(A) = a_{11}m_{11} - a_{12}m_{12} + a_{13}m_{13} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}m_{1n}.$$

Il reste à vérifier que f est bien un déterminant.

Un premier point est évident à vérifier : pour une matrice D diagonale, la formule se réduit à $f(D) = d_{11}m_{11}$ et on voit aussitôt que $f(D)$ est bien le produit des termes diagonaux de D.

La difficulté concerne le produit.

Lemme 27-7-19 : Pour toute matrice-transvection T et toute matrice carrée A, $f(AT) = f(A)$.

Démonstration : Soit $T = M_{ij}(\lambda)$ et notons $B = AT$. On sait que B s'obtient à partir de A en ajoutant λ fois la i-ème colonne de A à la j-ème colonne de A.

Notons M' la matrice des mineurs de B et comparons ceux-ci aux mineurs de A. Pour un indice k (avec $1 \leq k \leq n$), soit A_k la sous-matrice $(n-1,n-1)$ de B obtenue par ablation de la première ligne et de la k-ème colonne et de même B_k. Lorsque l'indice k est à la fois distinct de i et de j, la matrice B_k s'obtient à partir de la matrice A_k en ajoutant un multiple d'une colonne à une autre colonne, donc $m'_{1k} = m_{1k}$. Par ailleurs pour ces indices k, $a_{1k} = b_{1k}$. Pour conclure que $f(A) = f(B)$ il suffit donc de prouver que

$$(-1)^{i+1}a_{1i}m_{1i} + (-1)^{j+1}a_{1j}m_{1j} = (-1)^{i+1}b_{1i}m'_{1i} + (-1)^{j+1}b_{1j}m'_{1j}$$

Pour $k=j$ les choses sont encore plus simples : les modifications faites pour passer de A à B ont concerné la j-ème colonne, celle qu'on a enlevée pour construire A_j puis B_j. Ces deux sous-matrices sont exactement les mêmes, et on a encore $m'_{1j} = m_{1j}$. Par ailleurs $b_{1j} = a_{1j} + \lambda a_{1i}$

En revanche, les choses se compliquent pour $k=i$. Pas de problème pour $b_{1i} = a_{1i}$ mais pour calculer m'_{1i} ça se corse. Écrivons :

$$B_i = \begin{pmatrix} a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & & a_{2,j-1} & a_{2,j}+\lambda a_{2,i} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,i-1} & a_{3,i+1} & \cdots & & a_{3,j-1} & a_{3,j}+\lambda a_{3,i} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & & a_{n,j-1} & a_{n,j}+\lambda a_{n,i} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

(On notera que cette écriture n'est correcte que pour $i<j$, si $j<i$ il faut tout réécrire en conséquence, ce qu'on "laissera au lecteur").

En jouant sur la linéarité du déterminant $(n-1,n-1)$ par rapport à chacune de ses colonnes,

$$m'_{1i} = \det B_i = \begin{vmatrix} a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,i-1} & a_{3,i+1} & \cdots & & a_{3,j-1} & a_{3,j} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$
$$+ \lambda \begin{vmatrix} a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & & a_{2,j-1} & a_{2,i} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & \cdots & a_{3,i-1} & a_{3,i+1} & \cdots & & a_{3,j-1} & a_{3,i} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & & a_{n,j-1} & a_{n,i} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant dans cette égalité n'est autre que m_{1i} ; le second ressemble à m_{1j} mais ses colonnes sont désordonnées : la colonne avec des indices i n'est pas au bon endroit ! Pour l'y ramener, il suffit de l'échanger avec ses voisines : soit successivement avec la colonne immédiatement à sa gauche, puis celle un

peu plus à gauche, et ainsi de suite jusqu'à un dernier échange, celui avec la colonne portant les numéros $i+1$. Au total, on aura fait $j-1-i$ échanges ; le second déterminant vaut donc $(-1)^{j-i-1}m_{1j}$.
Finalement

$$\begin{aligned}(-1)^{i+1}b_{1i}m'_{1i}+(-1)^{j+1}b_{1j}m'_{1j} &= (-1)^{i+1}a_{1i}(m_{1i}+(-1)^{j-i-1}\lambda m_{1j})+(-1)^{j+1}(a_{1j}+\lambda a_{1i})m_{1j}\\ &= (-1)^{i+1}a_{1i}m_{1i}+(-1)^{j+1}a_{1j}m_{1j}+[(-1)^{j}+(-1)^{j+1}]\lambda a_{1i}m_{1j}\\ &= (-1)^{i+1}a_{1i}m_{1i}+(-1)^{j+1}a_{1j}m_{1j}\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $f(A)=f(B)=f(AT)$.

•

Lemme 27-7-20 : Pour toute matrice diagonale D et toute matrice carrée A, $f(AD)=f(A)f(D)$.
Démonstration : C'est beaucoup plus facile que le lemme précédent. Posons

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$

et $B=AD$. La matrice B s'obtient donc en multipliant la première colonne de A par λ_1, la deuxième par λ_2 et ainsi de suite.
Notons là encore m'_{ij} les mineurs de B. Quand on calcule une expression $b_{1i}m'_{1i}$, le coefficient b_{1i} est égal à $\lambda_i a_{1i}$ tandis que le mineur m'_{1i} vaut $\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdots\lambda_n m_{1i}$: le terme $b_{1i}m'_{1i}$ est donc exactement égal à $\lambda_1\cdots\lambda_n a_{1i}m_{1i}$.
En sommant sur tous les termes, $f(AD)=f(B)=\lambda_1\cdots\lambda_n f(A)=f(A)f(D)$. D'où $f(AB)=f(A)f(B)$.

•

Nous sommes maintenant armés pour montrer la multiplicativité de la fonction f. Soit A et B deux matrices carrées (n,n). Comme on a appris à le faire dans la première section, décomposons B en produit de matrices-transvections et d'une matrice diagonale, soit

$$B=S_1S_2\cdots S_kDT_l\cdots T_2T_1.$$

Les deux lemmes qui précèdent permettent alors successivement de calculer $f(S_1)=f(IS_1)=f(I)=1$, puis $f(S_1S_2)=f(S_1)=1$, puis $f(S_1S_2S_3)=f(S_1S_2)=1$ jusqu'à $f(S_1S_2\cdots S_kD)=f(S_1S_2\cdots S_k)f(D)=f(D)$ puis $f(S_1S_2\cdots S_kDT_l)=f(S_1S_2\cdots S_kD)=f(D)$ et jusqu'à $f(B)=f(D)$.
et en recommençant à partir de $f(AS_1)=f(A)$ puis $f(AS_1S_2)=f(AS_1)=f(A)$ et ainsi de suite, on arrive à $f(AB)=f(A)f(D)$.

•

8 - Déterminant et transposition

Théorème 27-8-58 : Soit A une matrice carrée à coefficients dans un corps commutatif. On a l'identité $\det A=\det {}^tA$.

•

Démonstration : Soit $\mathbf{K}$ le corps commutatif des coefficients de A et n son côté. Considérons sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ d'une part l'application déterminant, et d'autre part l'application f définie par $f(M)=\det {}^tM$. Les matrices diagonales étant égales à leur transposée, f a la même valeur que det sur les matrices diagonales ; pour M et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(MN)=\det {}^t(MN)=\det {}^tN{}^tM=\det {}^tN\det {}^tM=f(N)f(M)$.

L'application f est donc un déterminant, donc $f=\det$; en particulier $f(A)=\det A$.

•

Remarque : En conséquence, tout ce qu'on a dit sur les colonnes reste valable sur les lignes ; le développement par rapport à la première ligne peut être remplacé par un développement par rapport à la première colonne ; le déterminant des matrices triangulaires supérieures s'arrange aussi bien que celui des matrices triangulaires inférieures.