

On fixe pour tout le chapitre un corps \mathbb{K} . On va associer à toute matrice carrée, et même à tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, un scalaire appelé *déterminant*, ce qui va donner :

- un critère numérique pour l'inversibilité d'une matrice ou d'un endomorphisme,
 - des formules (inutiles en pratique) pour résoudre les systèmes linéaires,
 - un cadre pour parler de l'orientation d'un espace vectoriel réel,
 - un outil pour mesurer les aires et les volumes,
- et, plus tard,
- un invariant plus fin d'un endomorphisme appelé *polynôme caractéristique*, qui contrôle dans une large mesure le comportement de l'endomorphisme,
 - un outil pour les changements de variables dans les intégrales multiples,
 - etc.

Notation. Pour n entier naturel non nul, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbb{K} , par \mathbf{I}_n la matrice identité de taille $n \times n$.

On utilisera librement les matrices $T_{ij}(\lambda)$, $D_i(\alpha)$, P_{ij} introduites à la fin du chapitre sur les matrices, ainsi que l'effet de la multiplication de ces matrices en termes d'opérations sur les rangées.

I Construction

1° Mauvaise définition

Notation (Matrices extraites). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. On note alors A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de A : si $A = (a_{ij})$, on a :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n-1) \times (n-1)}(\mathbb{K}).$$

Définition. On définit une famille d'applications $\det_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ par récurrence sur l'entier naturel n . Pour $n = 1$, on pose :

$$\forall (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}), \quad \det_1((a)) = a.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons avoir défini $\det : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$. On pose alors, pour A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_{1j} \det_{n-1} A_{1j}.$$

Remarques. (i) Lorsque n est fixé, on notera désormais \det au lieu de \det_n .

(ii) C'est une mauvaise définition car elle semble tout à fait artificielle et n'a aucune symétrie : pourquoi de telles choses auraient-elles la moindre propriété utile ?

2° Premiers exemples

Exemple. Pour $n = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),$$

on a $A_{11} = (d)$ et $A_{12} = (c)$, si bien que

$$\det A = ad - bc.$$

Exemple. Pour $n = 3$ et $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le déterminant d'une matrice 3×3 est donné par la règle de Sarrus :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{---} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ \text{---} a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \end{matrix}$$

Lemme. Soit n un entier non nul. Supposons que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit triangulaire inférieure, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ si $1 \leq i < j \leq n$. Visuellement :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est le produit des coefficients diagonaux :

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

DÉMONSTRATION. On le prouve par récurrence sur n . Pour $n = 1$, c'est évident. Soit $n \geq 2$, supposons que ce soit vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Alors pour A comme ci-dessus, on a par définition :

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + \sum_{j \geq 2} (-1)^{j-1} \times 0 \times \det A_{1j} = a_{11} \det A_{11},$$

ce qui permet de conclure la récurrence. En particulier, on a :

$$\det \mathbf{I}_n = 1.$$

Voici un cas d'annulation bien utile.

Lemme. Supposons qu'une ligne de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit nulle : alors $\det(A) = 0$.

DÉMONSTRATION. On le prouve par récurrence (finie) sur l'indice i de la ligne nulle. Si $i = 1$, c'est clair par la définition : tous les coefficients a_{1j} étant nuls, la somme $\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} a_{1j} \det(A_{1j})$ est nulle aussi. Soit $i \geq 2$, supposons que le déterminant de toute matrice dont la $(i-1)$ -ème ligne est nulle est nul et soit A une matrice dont la i -ème ligne est nulle.

Pour j entre 1 et n , la $(i-1)$ -ème ligne de chaque matrice extraite A_{1j} est formée de coefficients de la i -ème ligne de A donc elle est nulle. Par l'hypothèse de récurrence, on a donc : $\det(A_{1j}) = 0$. Par définition, on en tire que $\det(A) = 0$.

Exemple. Le déterminant d'une matrice de transvection¹ $T_{ij}(\lambda)$ vaut 1.

On le montre par récurrence sur n . Pour $n = 1$, il n'y a pas de transvection. Pour $n = 2$, c'est clair : $\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \geq 3$ et supposons que la propriété soit vraie au format $n-1$. Supposons dans un premier temps que l'on ait : $i \geq 2$. Alors, la première ligne de $T_{ij}(\lambda)$ est $(1 \ 0 \ \dots \ 0)$. Le seul terme non nul dans la définition est le premier et la matrice extraite correspondante, A_{11} , est l'identité \mathbf{I}_{n-1} (si $j = 1$) ou la transvection $T_{i-1,j-1}(\lambda)$ (si $j \geq 2$). Par hypothèse de récurrence, on a donc : $\det(A) = \det(A_{11}) = 1$.

Si $i = 1$, on a : $\det(A) = 1 \det \mathbf{I}_{n-1} + (-1)^{j-1} \lambda \det(A_{1j})$. Mais observons la matrice A : comme $j \neq i$, le seul coefficient non nul de la ligne j est un 1 placé dans la colonne j . Par suite, dans la matrice extraite A_{1j} , la ligne d'indice $j-1$ est nulle. Par le lemme précédent, on a donc : $\det(A_{1j}) = 0$ et donc : $\det(A) = 1$.

3° Bonne caractérisation

a) L'énoncé

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application \det est l'unique application $\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

(a) pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$;

(b) pour tous scalaires d_1, \dots, d_n dans \mathbb{K} , on a : $\det \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdots d_n$.

Sens : D'une part, on a :

$$\boxed{\det(AB) = \det(A) \det(B),} \quad (\mu)$$

d'autre part le déterminant est la seule application à satisfaire à ces contraintes. La première partie est la plus difficile à démontrer, on l'admettra ici. On va prouver l'unicité plus loin.

b) Conséquences de la multiplicativité (μ) .

Dans ce paragraphe, on fixe une application $\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ qui satisfait à (a) et (b).

Lemme. Soit P une matrice inversible : alors, $\Delta(P) \neq 0$.

Soit de plus A une matrice quelconque : alors $\Delta(PAP^{-1}) = \Delta(A)$.

Attention ! En général, PAP^{-1} n'est pas égale à A .

DÉMONSTRATION. Pour la première assertion, on écrit : $\Delta(P)\Delta(P^{-1}) = \Delta(PP^{-1}) = \Delta(\mathbf{I}_n) = 1$. Pour la seconde, on utilise la commutativité du produit des scalaires : $\Delta(PAP^{-1}) = \Delta(P)\Delta(A)\Delta(P^{-1}) = \Delta(P)\Delta(P^{-1})\Delta(A) = \Delta(A)$.

Lemme. Soit $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors : $\Delta(T_{ij}(\lambda)) = 1$.

1. Pour i et j distincts entre 1 et n et λ dans \mathbb{K} , on note $T_{ij}(\lambda) = \mathbf{I}_n + \lambda E_{ij}$ où E_{ij} est la matrice dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est en position (i, j) .

DÉMONSTRATION. Un calcul direct donne² : $T_{ij}(\lambda)^2 = T_{ij}(2\lambda)$. On suppose que 2 est différent de 0 dans \mathbb{K} (c'est le cas dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} ...). Un nouveau calcul donne³ : $D_j(1/2)T_{ij}(\lambda)D_j(2) = T_{ij}(2\lambda)$. D'après le lemme précédent, on a donc, en posant $d = \det T_{ij}(\lambda)$: d'une part, $d \neq 0$ car $T_{ij}(\lambda)$ est inversible et d'autre part : $d^2 = \det T_{ij}(2\lambda) = d$. Par suite, $d = 1$.

On en déduit l'unicité dans le théorème. Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, des opérations sur les rangées permettent de montrer qu'il existe des transvections $T_1, \dots, T_s, T'_1, \dots, T'_{s'}$ et une matrice diagonale D telle que : $A = T_1 \cdots T_s D T'_1 \cdots T'_{s'}$. Par multiplicativité (condition (a)), on a donc d'après le lemme précédent :

$$\Delta(A) = \Delta(T_1) \cdots \Delta(T_s) \Delta(D) \Delta(T'_1) \cdots \Delta(T'_{s'}) = \Delta(D).$$

Mais $\Delta(D)$ est prescrit par la condition (b) du théorème, ce qui prouve l'unicité⁴.

II Propriétés du déterminant et calcul

1° Opérations sur les rangées

Proposition. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A ...

- (i) ne change pas si on ajoute à une rangée un multiple d'une autre rangée (ou une combinaison linéaire des autres rangées) ;
- (ii) est multiplié par α si on multiplie une rangée par un scalaire $\alpha \neq 0$;
- (iii) est multiplié par -1 si on permute deux rangées.

DÉMONSTRATION. On fait la démonstration seulement pour les lignes. Pour les colonnes, il suffit de remplacer l'ordre des matrices dans les produits et quelques indices.

(i) Soit A' la matrice obtenue de A en remplaçant la i -ème ligne de A , disons L_i , par $L_i + \lambda L_j$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$. On a alors : $A' = T_{ij}(\lambda)A$. Par multiplicativité, et vu que les transvection ont pour déterminant 1, il vient : $\det A' = \det A$. En appliquant plusieurs fois ce résultat, on peut ajouter à la ligne une combinaison linéaire quelconque des autres lignes.

(ii) Remplacer la ligne L_i par αL_i , c'est remplacer A par $A' = D_i(\alpha)L_i$. Par suite : $\det A' = \det D_i(\alpha) \det A = \alpha \det A$.

(iii) Permuter deux lignes de A , c'est remplacer A par $A' = P_{ij}A$. Par suite⁵ : $\det A' = \det P_{ij} \det A = -\det A$.

Remarque. Démontrer cette proposition à partir du théorème est une hypocrisie : en effet, la preuve du théorème consiste à prouver cette proposition et à en déduire la multiplicativité du déterminant.

2. Par exemple, pour $n = 2$, cela revient à vérifier que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Par exemple, pour $n = 2$, cela revient à vérifier que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Si Δ_1 et Δ_2 satisfont toutes deux à (a) et (b), alors on a : $\Delta_1(A) = \Delta_1(D) = d_1 \cdots d_n = \Delta_2(D) = \Delta_2(A)$.

5. Rappelons que l'on a : $P_{ij} = D_i(-1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1)T_{ij}(-1)$, de sorte que $\det P_{ij} = -1$ par multiplicativité.

2° Déterminant et transposition

Définition. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. La *transposée* d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice notée ${}^tA = (a'_{ji}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie ainsi : pour $(j, i) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$, on a : $a'_{ji} = a_{ij}$.

Les propriétés suivantes se démontrent facilement.

Lemme. La *transposition* est une application linéaire $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Lorsque $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a : ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

L'intérêt de la transposition est de permuter lignes et colonnes ; mais pour le déterminant, rien ne change.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $\det({}^tA) = \det(A)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto \det({}^tA)$. On a, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\Delta(AB) = \det({}^t(AB)) = \det({}^tB {}^tA) = \det({}^tB) \det({}^tA) = \Delta(B) \Delta(A) = \Delta(A) \Delta(B).$$

De plus, comme une matrice diagonale est égale à sa transposée, son image par Δ est son déterminant, c'est-à-dire le produit des coefficients diagonaux. Autrement dit, Δ satisfait aux conditions (a) et (b) du théorème et il vient : $\Delta = \det$.

3° Développement selon une rangée

On va utiliser la matrice « damier » que voici :

$$((-1)^{i+j})_{i,j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & + & - \\ \cdots & \cdots & \cdots & - & + \end{pmatrix}.$$

Proposition. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

(i) (« développement selon une ligne ») pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij};$$

(ii) (« développement selon une colonne ») pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a :

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij};$$

DÉMONSTRATION. [ou presque] (i) Le cas $i = 1$ n'est qu'une redite de la définition. Pour un indice i quelconque, on effectue les opérations suivantes : permuter les lignes 1 et i ; appliquer la définition ; permuter dans chaque matrice A_{1j} les lignes 1 et $i - 1$. En faisant attention aux signes, on obtient la formule souhaitée.

(ii) Cela résulte simplement de la partie (i) et de l'invariance du déterminant par transposition.

4° À propos du calcul pratique

L'idée consiste à se laisser guider par l'esprit de Gauss : par des opérations sur les rangées, on fait apparaître une rangée ne contenant presque que des zéros (si possible, 1 ou 2 au maximum) et on développe par rapport à cette rangée, puis on recommence avec les matrices obtenues (qui sont plus petites, le procédé finit par aboutir). Voir les innombrables exemples traités en TD.

5° Inversibilité

Critère d'inversibilité

Proposition. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0.$$

DÉMONSTRATION. On a déjà vu un sens comme conséquence de la multiplicativité : si A est inversible, alors : $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = 1$.

On prouve la contraposée de cette assertion. Si A n'est pas inversible, alors son rang est strictement inférieur à n . Autrement dit, la famille des n colonnes de A , disons (C_1, \dots, C_n) , est liée. Autrement dit, l'une des colonnes, disons C_{j_0} , est combinaison linéaire des autres : $C_{j_0} = \sum_{j \neq j_0} \lambda_j C_j$ (pour une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j \neq j_0}$ convenable). Si on remplace la colonne C_{j_0} de A par $C_{j_0} - \sum_{j \neq j_0} \lambda_j C_j$, on ne change pas le déterminant mais on fait apparaître une colonne de zéros : par conséquent, le déterminant – qui est celui de A – est nul.

Comatrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle *comatrice* de A la matrice $\text{com}(A) = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Proposition. On a, pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A^t \text{com}(A) = \det(A) \mathbf{I}_n = {}^t \text{com}(A) A.$$

DÉMONSTRATION. On ne montre que la première égalité, l'autre résulte de considérations analogues en remplaçant les lignes par les colonnes. On note $D = (d_{ij})$ la transposée de la comatrice de A : pour i et k entiers compris entre 1 et n , on a : $d_{ki} = c_{ik}$. D'autre part, on pose $B = AD$. Pour $(i, i') \in \{1, \dots, n\}^2$, le coefficient d'indice (i, i') de B est :

$$b_{ii'} = \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{ki'} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i'+k} a_{ik} \det A_{i'k}.$$

Fixons $i \in \{1, \dots, n\}$. On a :

$$b_{ii} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \det A$$

car on reconnaît le développement du déterminant de A selon la i^{e} ligne !

À présent, soit $i \neq i'$. On a :

$$b_{ii'} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i'+j} a_{ij} \det A_{i'j}.$$

On reconnaît là le développement du déterminant selon la i' -ème de la matrice A' obtenue en remplaçant la i' -ème de A par la i -ème ligne de A :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i'-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i'-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i'+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i'+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Comme A' a deux lignes égales, celles d'indices i et i' , on a bien :

$$b_{ii'} = \det A' = 0.$$

Expression de l'inverse

Corollaire. Pour P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{com}(P).$$

Exemple. Pour $n = 1$, si a, b, c, d sont des scalaires tels que $ad - bc \neq 0$, on retrouve :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Mise en garde. En pratique, cette formule n'est pas très commode et on ne l'utilise presque jamais. En effet, elle exige de calculer n^2 déterminants de taille $n - 1$ (pour la comatrice) et 1 déterminant de taille n , ce qui représente une très grande quantité de calculs.

On préférera donc chercher l'inverse d'une matrice P en fixant $Y = (y_1, \dots, y_n)$ arbitraire dans \mathbb{K}^n et en résolvant le système $PX = Y$ d'inconnue $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On obtiendra une expression des x_i de la forme :

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad x_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} y_j,$$

et l'inverse de P est la matrice (q_{ij}) . Pourquoi, au fait ?

III Applications

Pas traité en cours.