Rudiments de logique

Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : Algèbre
Année 2015–2016

En guise d'introduction
Le but de ce chapitre est de donner des clés pour décrypter et manipuler les formules les plus complexes de l'année, dont voici deux exemples :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon,$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \big(\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \lambda_i = 0\big).$$

Avant d'acquérir assez de familiarité avec des formules, il faut commencer par réussir à les lire ! Pour aider à les comprendre, nous apprendrons à les manipuler formellement, c'est-à-dire sans essayer d'en saisir le sens. En particulier à écrire la négation de formules arbitrairement compliquées de façon quasiment automatique.

Objectifs du chapitre :
- proposer une référence pour les problèmes de logique que l'on pourrait rencontrer plus tard dans l'année ;
- voir ou revoir des modes de raisonnement variés au-delà de la déduction directe : contraposition, raisonnement par l'absurde, disjonction des cas, récurrence ;
- savoir écrire la négation d'une formule complexe ;
- savoir manipuler les formules avec quantificateurs, en particulier : comment démontrer ou réfuter une assertion de la forme $\forall x,\ P(x)$ ou de la forme $\exists x,\ P(x)$.

I Vérité et connecteurs

a) Les textes mathématiques sont écrits avec des lettres dont il faut distinguer dans quel alphabet elles sont écrites (distinguer a en alphabet latin de α en alphabet grec [1]), en majuscules ou en minuscules (distinguer a de A), dans quelle police (distinguer A, $\mathscr{A}$ et $\mathbb{A}$), à quelle position (distinguer xn, x_n et x^n). Bien sûr, on utilise aussi des symboles plus ou moins spécifiques comme $<$, $+$, $\sum$, $\Rightarrow$, cos, etc.
Avec ces lettres et ces symboles, on écrit des phrases en suivant des règles de syntaxe qui ne seront pas énumérées ici. Voici deux exemples de phrases dont syntaxe est incorrecte : « $3+(2=3)-1$ » ; « $\exists y,\ x = y^2,\ \forall x$ ». Et deux phrases dont la syntaxe est correcte : « $3 + (2 - 1) = 5$ » ; « $\forall x,\ \exists y,\ x = y^2$ ».
Dans la suite, on appelera *assertion* ou *proposition* une phrase syntaxiquement correcte. Une fois la syntaxe vérifiée, on peut alors – et alors seulement – se demander quel est son sens.
b) Dans un contexte d'interprétation, toute phrase possède une valeur de vérité, qui est l'une [2] (et une seule) des deux valeurs suivantes : *vrai*, *faux*. On abrège souvent ces valeurs en V et F. Bien sûr, la valeur de vérité dépend du contexte. Par exemple, l'assertion $n^2 - 3n + 2 = 0$...
- ne peut pas être interprétée dans un contexte où n et un triangle rectangle ;
- est fausse dans un contexte où n est un réel négatif ;
- est vraie dans un contexte où n vaut 1 ;
- est équivalente à $n \in \{1, 2\}$ dans un contexte où n est un réel quelconque.

1. Alphabet grec qu'il serait d'ailleurs judicieux d'apprendre assez vite pour ne pas dire « delta » en écrivant λ ou pour distinguer v de ν et w de ω, par exemple.
2. Décréter qu'une assertion est soit vraie, soit fausse, est déjà un parti-pris épistémologique. Certains mathématiciens, dits constructivistes, le refusent.

c) Convenons d'une notation : lorsque P et Q sont deux assertions, on abrègera la phrase « P et Q ont la même valeur de vérité » en disant « P et Q sont équivalentes » et en écrivant : « $P \Leftrightarrow Q$ ». On verra plus loin que $\Leftrightarrow$ est un connecteur parmi d'autres mais pour l'instant, c'est juste une notation.

d) Dans la suite de cette partie I, on étudie certains *connecteurs* : ce sont des façons de construire une nouvelle assertion à partir d'une ou plusieurs assertions. Les deux buts principaux de cette partie sont :

— de restreindre l'usage des mots courants *et*, *ou* et du symbole $\Rightarrow$ lorsque l'on écrit un discours mathématique ;

— d'apprendre à écrire la négation d'assertions complexes de façon automatique.

On désigne les assertions par des lettres, comme on le ferait pour un réel, un entier, un point ou tout autre objet mathématique. Par exemple, on pourrait décider d'abréger la phrase « Hannibal est à San Francisco » ou la phrase « $3+2=5$ » par la seule lettre P.

1° Négation

a) Si P est une assertion, on en construit une nouvelle, notée $\mathrm{non}(P)$ ou parfois $\neg P$, et dont la valeur de vérité est donné par la table suivante.

P	$\mathrm{non}(P)$
V	F
F	V

Par exemple, lorsque x et y sont des objets quelconques, la phrase « $x = y$ » est une assertion et sa négation est équivalente à l'assertion « $x \neq y$ ». La négation de « $x < y$ » est équivalente à « $x \geqslant y$ ».

L'axiome du tiers exclu exprime que pour toute assertion P, l'assertion P ou sa négation est vraie.

b) Voici une première propriété essentiellement évidente.

Proposition. *Pour toute assertion P, on a l'équivalence :* $\mathrm{non}\big(\mathrm{non}(P)\big) \Leftrightarrow P$.

2° Conjonction : et ($\wedge$)

Lorsque P et Q sont deux assertions, on en construit une nouvelle, notée P et Q ou parfois $P \wedge Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table suivante.

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Proposition. *Soient P, Q et R trois assertions. Alors*[3] *:*

(i) $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$ *;*

(ii) $\big((P \text{ et } Q) \text{ et } R\big) \Leftrightarrow \big(P \text{ et } (Q \text{ et } R)\big)$ *;*

(iii) *l'assertion* $\big(P \text{ et } \mathrm{non}(P)\big)$ *est fausse (quelle que soit la valeur de vérité de P).*

3. Dans la liste ci-dessous, i, ii et iii sont 1, 2 et 3 écrits en chiffres romains ; il faut donc lire « un », « deux » et « trois » et pas « i », « deux i » et « trois i »...

Démonstration. (i) On vérifie sur la table qui définit P et Q que lorsque l'on permute P et Q, la valeur de vérité de P et Q ne change pas.
(ii) Première preuve par table : on calcule la valeur de vérité de chacune des assertions P et (Q et R) d'une part, (P et Q) et R d'autre part, selon la valeur de vérité de P, Q et R. Comme chacune de ces trois assertions peut prendre deux valeurs de vérité de façon indépendante, il y a $8 = 2 \times 2 \times 2$ cas à considérer, d'où huit ligne dans les tables ci-dessous, que l'on complète patiemment.

P	Q	R	P et Q	(P et Q) et R
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	Q et R	P et (Q et R)
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Le fait que les deux dernières colonnes soient identiques prouve l'assertion (ii).
Variante plus compacte : l'assertion P et Q est fausse à moins que P et Q ne soient toutes deux vraies ; l'assertion (P et Q) et R est fausse à moins que les assertions (P et Q) d'une part et R d'autre part ne soient vraie ; or l'assertion P et Q est fausse à moins que P et Q ne soient toutes deux vraies. Au bilan, l'assertion $\big((P$ et $Q)$ et $R\big)$ est vraie si P, Q et R le sont et elle est fausse sinon. On vérifie qu'il en est de même de $\big(P$ et $(Q$ et $R)\big)$.
(iii) Compte tenu de la définition de la négation, il suffit de constater que lorsque P est vraie, alors non(P) est fausse, de sorte que la conjonction P et non(P) est fausse, et vice versa. Pour le dire un peu différemment, on remplit la table ci-dessous.

P	non(P)	P et non(P)
V	F	F
F	V	F

On en déduit l'assertion (iii).□

Il importe de distinguer l'usage de la conjonction *et* comme connecteur logique et dans la vie courante : par exemple, la phrase « cette chemise est verte et rouge » peut être vraie mais l'usage n'est pas le même que le « et » précédent.

3° Disjonction : ou ($\vee$)

Lorsque P et Q sont deux assertions, on en construit une nouvelle, notée P ou Q ou parfois $P \vee Q$, dont la valeur de vérité est donnée par la table suivante.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque. Dans la vie courante, le *ou* est souvent exclusif : en général, lorsqu'un restaurant vous propose « fromage ou dessert », le serveur ne vous laissera pas commander les deux – sans supplément du moins. En revanche, le *ou* mathématique est inclusif : lorsque P et Q sont toutes deux vraies, la disjonction P ou Q l'est aussi [4].

Proposition. *Soient P, Q et R trois assertions. Alors :*

(i) $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$ *;*

(ii) $\big((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R\big) \Leftrightarrow \big(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\big)$ *;*

(iii) $\text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow \big(\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)\big)$ *;*

(iv) $\text{non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow \big(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big)$ *;*

(v) $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)\big)$ *;*

(vi) $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \Leftrightarrow \big((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)\big)$.

Démonstration. Les assertions (i) et (ii) se prouvent de la même façon que pour la conjonction. Pour prouver l'assertion (iii), on calcule la valeur de vérité des deux assertions de chaque côté du signe d'équivalence.

P	Q	P ou Q	non(P ou Q)	non(P)	non(Q)	non(P) et non(Q)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Comme les quatrième et septième colonnes de la table coïncident, on en déduit l'assertion (iii). On peut prouver de la même façon l'assertion (iv). On peut aussi procéder ainsi : comme deux assertions sont équivalentes exactement lorsque leurs négations le sont (pourquoi ?), il suffit de démontrer l'équivalence : $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow \text{non}\big(\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)\big)$. On retrouve ainsi l'assertion (iii) avec non(P) à la place de P et non(Q) à la place de Q : cette équivalence est donc vraie !
Les assertion (v) et (vi) peuvent se démontrer par exemple par des tableaux à huit lignes ; elles sont laissées en exercice.□

Remarque. Soient P, Q et R trois assertions. L'assertion « P ou Q ou R » prend un sens grâce à l'assertion (ii) des la proposition précédente : en effet, leur valeur de vérité est la même, qu'on la lise $\big((P \text{ ou } Q) \text{ ou } R\big)$, ou bien $\big(P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\big)$. Idem avec « P et Q et R ».
En revanche, l'assertion « P et Q ou R » n'a pas de sens. Il faut donc la proscrire ! En effet, les valeurs de vérité de $\big((P \text{ et } Q) \text{ ou } R\big)$ et de $\big((P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big)$ ne sont pas toujours les mêmes – supposer par exemple que P est fausse et que R est vraie (et alors ?).

4° Implication : $\Rightarrow$

a) L'implication est une façon de faire entrer dans le domaine des connecteurs le « si... alors... » du raisonnement mathématique. Mais il y a des différences sur lesquelles nous reviendrons. Tout d'abord, notons que si l'on veut faire de l'implication un connecteur, il faut attribuer une valeur de vérité à l'assertion $P \Rightarrow Q$ pour *toutes* les valeurs de vérité possibles des assertions P et Q, en fonction de celles-ci.
b) Voici un exemple pour motiver la définition à venir. Supposons connaître un *serial killer* Hannibal et qu'un meurtre à l'arme blanche ait été commis à San Francisco, dans un contexte où il est indubitable que le coup a été porté par une personne (et pas une machine élaborée en l'absence du meutrier ou un orang-outang comme dans le *Double assassinat dans la rue Morgue*). Nul ne doute alors de la véracité de la phrase suivante.

4. Ce qui peut conduire au dialogue suivant. « Tu veux du fromage ou du dessert ? – Oui. » Cela ne présage pas du choix de la personne qui répond.

> Si Hannibal a commis le meurtre, alors Hannibal était à San Francisco (au moment où il a été commis).

On imagine aisément que cette phrase se mathématise bien par $P \Rightarrow Q$, où P est la phrase ≪ Hannibal a commis le meurtre ≫ et Q la phrase ≪ Hannibal était à San Francisco au moment du meurtre ≫.
Si P est vraie, on est sûr que Q est vraie aussi. Si P n'est pas vraie, en revanche, on ne peut rien déduire sur Q : en effet, on n'a aucune information sur la localisation d'Hannibal au moment du meurtre. Voici donc une situation où l'on sait que l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors que l'on peut aussi bien envisager que P soit vraie ou fausse. Cela justifie d'attribuer une valeur de vérité dans des situations où la déduction naturelle est impuissante.
c) Voici une autre motivation pour la définition. Soient R et Q deux assertions. Supposons que l'on veuille démontrer la disjonction : R ou Q. Si R est vraie, il n'y a rien à faire. Mais si R est fausse, il faut démontrer Q. Inversement, sachant que lorsque R est fausse, alors Q est vraie, on peut en déduire la disjonction R ou Q. Autrement dit, pour démontrer l'assertion R ou Q, il s'agit exactement de démontrer que ≪ si R est fausse, alors Q est vraie ≫. Cela suggère que R ou Q est une bonne interprétation de ≪ si $\mathrm{non}(R)$, alors Q ≫. En remplaçant R par $P = \mathrm{non}(R)$, on aboutit à la définition qui vient.
d) Lorsque P et Q sont deux assertions, on en construit une nouvelle notée $P \Rightarrow Q$, définie comme étant $\mathrm{non}(P)$ ou Q. La valeur de vérité de cette nouvelle assertion est (à savoir par cœur) donné par la table suivante.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Voici les propriétés formelles de l'implication.

Proposition. *Soient P et Q trois assertions. Alors :*
(i) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \big(\mathrm{non}(P) \text{ ou } Q\big)$ *;*
(ii) $\mathrm{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \big(P \text{ et } \mathrm{non}(Q)\big)$ *;*
(iii) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \big(\mathrm{non}(Q) \Rightarrow \mathrm{non}(P)\big)$ *;*

Démonstration. (i) C'est la définition, simplement reformulée avec des symboles.
(ii) On peut dresser une table de vérité (exercice) ou faire un petit calcul :

$$\begin{aligned}\mathrm{non}(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow \mathrm{non}\big(\mathrm{non}(P) \text{ ou } Q\big)\\ &\Leftrightarrow \Big(\mathrm{non}\big(\mathrm{non}(P)\big) \text{ et } \mathrm{non}(Q)\Big)\\ &\Leftrightarrow \big(P \text{ et } \mathrm{non}(Q)\big).\end{aligned}$$

(iii) On peut faire une table ou utiliser les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(P \Rightarrow Q) &\Leftrightarrow \big(\mathrm{non}(P) \text{ ou } Q\big)\\ &\Leftrightarrow \Big(\mathrm{non}\big(\mathrm{non}(Q)\big) \text{ ou } \mathrm{non}(P)\Big)\\ &\Leftrightarrow \big(\mathrm{non}(Q) \Rightarrow \mathrm{non}(P)\big).\square\end{aligned}$$

On pourrait multiplier les tautologies de ce genre. En voici quelques-unes.

Exercice. Soient P, Q et R trois assertions. Alors :

(i) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$;

(ii) $P \Rightarrow (P \text{ ou } Q)$;

(iii) $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

e) Comment démontrer une implication ?

Voici plusieurs méthodes :

— On suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie. C'est légitime : lorsque P est fausse, l'implication est vraie, de sorte qu'il n'y a rien à démontrer. Autrement dit, démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, c'est démontrer que si P est vraie, alors Q est vraie. C'est là le lien le plus fort entre implication et « si... alors... ».

— On démontre que $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$: cette assertion est appelée la *contraposée* de l'implication $P \Rightarrow Q$; cette méthode s'appelle *raisonnement par contraposition.*

— On suppose que Q est fausse et on démontre que P est fausse : c'est une reformulation du point précédent.

— On suppose que P est vraie et que Q est fausse et l'on aboutit à une contradiction : on démontre ainsi que l'assertion P et $\text{non}(Q)$ est fausse, ce qui prouve notre implication par tiers exclu. C'est un raisonnement par l'absurde (voir plus bas).

Remarque (réfuter une implication)*.* Pour réfuter une implication $P \Rightarrow Q$, il s'agit de démontrer sa négation P et $\text{non}(Q)$, c'est-à-dire de démontrer que P est vraie et que Q est fausse.

Remarque (réciproque d'une implication)*.* La réciproque d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'assertion $Q \Rightarrow P$. C'est un exercice utile de dresser la table de vérité de $Q \Rightarrow P$ et de constater qu'elle ne coïncide pas avec celle de $P \Rightarrow Q$. Autrement dit, en général, une implication et sa réciproque ne sont pas équivalentes. C'est une source de confusion importante.

f) Ce que l'implication n'est pas :

— une relation de *causalité* : par exemple, l'implication

$$1 = \sqrt{1^2} \Rightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0\big)$$

est vraie parce que les assertions de part et d'autre du connecteur $\Rightarrow$ sont vraies, mais il n'y a aucun lien de causalité ou de déduction entre les deux ;

— un raccourci pour la conjonction *donc* : en effet :

  — lorsque l'on écrit « P donc Q », on veut dire : « je sais que P est vraie, j'en déduis que Q est vraie » ;

  — lorsque l'on écrit « $P \Rightarrow Q$ », on veut dire : « je ne sais pas si P est vraie ou fausse mais je sais que si P est vraie, alors Q est vraie aussi ».

g) Ce que l'implication permet de faire : des déductions !

Le lemme qui suit précise le lien entre l'implication et la déduction naturelle.

Lemme (*modus ponens*)**.** *Soient P et Q deux assertions. Si P est vraie et si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie. En symboles, on a :*

$$\big(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q.$$

Une telle assertion, vraie indépendamment des valeurs de vérité de P et Q, est appelée une *tautologie* – le sens est proche de *lapalissade.*

Démonstration. Pour démontrer l'implication, on suppose que P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies. Observons la table de vérité de l'implication. Comme on a supposé P vraie, on peut en oublier les deux dernières lignes. Mais comme on a supposé $P \Rightarrow Q$ vraie, on peut exclure la deuxième ligne ! On est donc nécessairement dans la situation où Q est vraie.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cela prouve le lemme.□

h) Résumé sur l'implication

Pour P et Q assertions quelconques, l'assertion $P \Rightarrow Q$ est définie comme « non(P) ou Q ». Sa négation est P et non(Q).
Le connecteur $\Rightarrow$ est la façon dont on formalise les phrases « si... alors... » en calcul propositionnel. En effet, pour démontrer l'implication « $P \Rightarrow Q$ », on peut procéder ainsi : on suppose que P est vraie et démontrer Q (c'est-à-dire, que si P est vraie, alors Q l'est). Pour réfuter l'implication « $P \Rightarrow Q$ », on peut procéder ainsi : on montre que P est vraie et que Q est fausse.
L'implication « $P \Rightarrow Q$ » est équivalente à sa contraposée, qui est « non(Q) $\Rightarrow$ non(P) ». Mais en général, elle n'est pas équivalente à sa réciproque « $Q \Rightarrow P$ ».

5° Équivalence : $\Leftrightarrow$

D'après la table qui définit l'implication, la conjonction $\big((P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)\big)$ est vraie exactement lorsque P et Q sont toutes deux vraies ou toutes deux fausses, c'est-à-dire lorsqu'elles sont équivalentes (la table ci-dessous permet de le vérifier si l'on n'est pas convaincu).

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Cela se traduit par une équivalence :

$$\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P)\big) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q),$$

ce qui redéfinit l'équivalence comme un connecteur. Ou, à l'envers, permet de voir ou revoir qu'une double implication est synonyme de « même valeur de vérité ».

Remarque. C'est une méthode classique, pour démontrer une équivalence, de démontrer deux implications réciproques. On dit que l'on procède « par double implication » (eh !).

II Variables et quantificateurs

1° Variables muettes et parlantes

En mathématiques, on utilise des lettres ou des assemblages de lettres pour désigner des objets variés : x, cos, f, u_n... Partons de la formule suivante :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78.$$

Il est classique d'abréger la somme du membre de gauche en $\sum_{k=1}^{12} k$. Comme chacun sait, cela désigne l'entier obtenu en ajoutant tous les entiers entre 1 et 12. Aussi, lorsque l'on écrit :

$$\sum_{k=1}^{12} k = 78,$$

on n'est pas du tout en train de parler d'un entier k. La lettre k qui intervient n'est pas définie par le contexte – bien plus, si le contexte utilisait cette lettre pour désigner un objet, il y aurait conflit de notations. De même, la formule

$$\int_0^2 x \, \mathrm{d}x = 2$$

ne parle pas du tout d'un réel x – ni d'un réel d, d'ailleurs... Dans ces formules, k et x sont des *variables muettes* (ou *liées*) :

— elles n'ont pas de sens ou de valeur attribuée en dehors de la formule ;

— on peut à volonté les remplacer par (presque) n'importe quel autre symbole sans changer le sens de la formule – et écrire, par exemple : $\sum_{j=1}^{12} j = 78$.

Remarque. En informatique, on peut voir là une certaine analogie avec une variable locale à une fonction (ou procédure) dans un programme : à l'intérieur de la fonction, la variable est connue mais dans le corps du programme principal, elle ne l'est pas.

Considérons à présent la formule

$$\frac{n(n+1)}{2} = 78.$$

Est-elle vraie ou fausse ? Cela n'a en fait guère de sens de se poser la question comme cela : qui est n ? Si n désigne un triangle, l'expression $n(n+1)/2$ ne peut même pas être interprétée ! Si n est un entier fixé, la formule est vraie si $n = 12$ ou si $n = -13$ et elle est fausse sinon.

On voit bien que la formule $n(n+1)/2 = 78$ « parle » de n et que la lettre n n'y joue pas le même rôle que k ou x dans les précédentes. On dit que n est une *variable parlante* (ou *libre*) dans la formule.

Bien sûr, les formules font souvent intervenir à la fois des variables muettes et des variables parlantes. Par exemple, dans la formule suivante, la variable k est muette alors que n est parlante :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mise en garde. Il est utile, lorsque l'on essaie de décrypter une formule, de bien distinguer les variables parlantes des variables libres.

Convention. On va noter $P(x)$ une assertion qui dépend de la variable parlante x. Par exemple, $P(x)$ pourrait désigner l'assertion : $x^2 \geqslant 0$.

2° Quantificateurs : $\forall$ et $\exists$

a) Deux symboles

Lorsque l'on a une assertion $P(x)$ dans laquelle la variable x est parlante, on forme deux nouvelles assertions : d'une part,

$$\forall x, \ P(x),$$

et d'autre part :

$$\exists x, \ P(x).$$

L'assertion ≪ $\forall x,\ P(x)$ ≫ signifie : ≪ pour toute valeur de x, l'assertion $P(x)$ est vraie ≫. Autrement dit, si l'on remplace chaque occurrence de x dans la phrase $P(x)$ par une valeur quelconque[5], l'assertion obtenue est vraie. Si l'on veut préciser que les valeurs autorisées pour x forment un ensemble E, on écrit : $\forall x \in E,\ P(x)$.
L'assertion ≪ $\exists x,\ P(x)$ ≫ signifie : ≪ il existe au moins une valeur de x pour laquelle l'assertion $P(x)$ est vraie ≫. Autrement dit, si l'on remplace chaque occurrence de x dans la phrase $P(x)$ par une valeur bien choisie, l'assertion obtenue est vraie. Comme pour $\forall$, on peut écrire des choses du genre : $\exists x \in E,\ P(x)$.

Exemple. Voici des assertions vraies :

(i) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(k\pi) = 0$ (dém. ?) ;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$ (dém. ?) ;

(iii) $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ (dém. ?) ;

(iv) $\exists x \in \mathbb{R},\ 3x + 1 = 0$ (dém. : remplacer x par $-1/3$) ;

(v) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 > 0$ (dém. : ≪ prendre ≫ $x = 2$) ;

(vi) $\exists x \in \mathbb{R},\ x^7 - x + 1 = 0$ (facile à démontrer avec le théorème des valeurs intermédiaires mais on ne connaît pas de ≪ formule explicite ≫).

Si $P(x)$ est une équation (ou une inéquation ou un système d'équations, etc.), l'assertion : $\exists x,\ P(x)$ se traduit en langage courant par : ≪ l'équation $P(x)$ possède au moins une solution ≫. Pour prouver cette assertion, on n'est pas toujours obligé de résoudre complètement l'équation.

Exercice. Soit n un entier naturel. Pour d naturel, on écrit $d \mid n$ et on lit : ≪ d divise n ≫ pour dire : il existe un entier e tel que $n = de$. Que signifie l'assertion : $\forall d,\ d \mid n \Rightarrow (d = 1 \text{ ou } d = n)$?

b) Mutification implicite

Voici un bien gros mot... Mais il est important de remarquer que dans les formules $\forall x,\ P(x)$ et $\exists x,\ P(x)$, la variable x est *muette* (alors qu'elle était supposée parlante dans $P(x)$).

Exemple. Soit x un réel. Dans l'assertion

$$\forall \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \Rightarrow x^2 < \varepsilon,$$

la variable x est parlante et la variable ε est muette. Autrement dit : d'une part, la formule donne une propriété de x ; d'autre part, même si l'on suppose la formule vraie, cela n'a aucun sens de parler d'un ε, car la formule n'en donne pas. C'est un exercice instructif de montrer que ce que dit la formule de x, c'est que $x = 0$.

c) Unicité

L'existence d'un objet x tel que $P(x)$, c'est bien. Parfois, on veut s'assurer qu'un tel x est *unique* – par exemple, $P(x)$ désigne une équation et on veut s'assurer qu'elle a une unique solution. Pour cela, la façon la plus courante de procéder est la suivante : on suppose avoir deux objets x et x' tels que les assertions $P(x)$ et $P(x')$ sont vraies et on démontre qu'alors, on a : $x = x'$. Autrement dit, on exprime l'unicité par :

$$\forall x,\ \forall x',\ \big(P(x) \text{ et } P(x')\big) \Rightarrow x = x'.$$

Il arrive que l'on utilise le quantificateur $\exists!$ dans une assertion de la forme ≪ $\exists! x,\ P(x)$ ≫ pour abréger : ≪ il existe un unique x tel que $P(x)$ soit vraie ≫. Par exemple : $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 - 4x + 4 = 0$. Pour prouver une telle assertion, on prouve (en général séparément) l'existence (c'est-à-dire : $\exists x,\ P(x)$) et l'unicité (comme ci-dessus).
NB : Il est rare que l'on prouve l'unicité par l'absurde, c'est-à-dire en supposant que $x \neq x'$.

5. Cette valeur est supposée choisie dans un domaine d'interprétation donné par le contexte.

d) Preuve...

Une preuve d'une assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ » commence presque toujours par :

> Soit $x \in E$. [...] On a donc : $P(x)$.

Et l'on peut ajouter, si l'on veut insister :

> Comme x était quelconque, on a prouvé que $\forall x \in E,\ P(x)$.

Sinon, de toute façon, on ne sait pas « qui est x ». Il est chaudement, voire fermement recommandé de ne pas laisser le lecteur imaginer « qui est x », c'est-à-dire à commencer à parler d'un objet x sans avoir explicitement dit qui il était ou quel était son statut : un élément quelconque de E ? un élément de E soumis à des contraintes particulières ? un objet dont la valeur est soumise à des choix antérieurs ? Il est toujours dangereux de laisser ces choses implicites.

Pour prouver une assertion de la forme « $\exists x \in E,\ P(x)$ », il peut être utile de commencer la rédaction par :

> On cherche $x \in E$ tel que [...]

Il y a en gros deux types de stratégies :
- soit on exhibe une valeur explicite de x telle que $P(x)$ soit satisfaite ;
- soit on prouve son existence par un moyen détourné, un théorème général comme par exemple le théorème des valeurs intermédiaires.

e) ... et réfutation

Réfuter une assertion, c'est prouver sa négation. Commençons par un exemple : pour réfuter qu'une propriété $P(x)$ est vraie pour toute valeur de x (disons dans un ensemble E), il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire une valeur pour laquelle $P(x)$ est fausse. Autrement dit :

$$\mathrm{non}\big(\forall x \in E,\ P(x)\big) \Leftrightarrow \big(\exists x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))\big).$$

Inversement, pour réfuter l'existence d'une valeur (disons dans un ensemble E) pour laquelle l'assertion $P(x)$ serait vraie, il faut montrer que pour toute valeur de x, l'assertion $P(x)$ est fausse. Autrement dit :

$$\mathrm{non}\big(\exists x \in E,\ P(x)\big) \Leftrightarrow \big(\forall x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))\big).$$

Exemple. Souvent, on écrit des quantification comme : $\forall \varepsilon > 0$ au lieu de $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. Par exemple, pour x réel fixé, on peut considéré l'assertion :

$$\forall \varepsilon > 0,\ x^2 < \varepsilon.$$

La négation de cette phrase étant $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathrm{non}(x^2 < \varepsilon)$, elle s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0,\ x^2 \geqslant \varepsilon.$$

Il serait tout à fait extravagant d'écrire : $\forall \varepsilon \leqslant 0,\ x^2 \geqslant \varepsilon$ (mais cela s'est déjà vu...).

f) Empilement de quantificateurs

Les choses deviennent plus délicates à interpréter avec plusieurs quantificateurs dans une phrase.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de la variable réelle. Interprétons les assertions :

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$;

(ii) $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$.

L'assertion (i) est une tautologie : elle est vraie quelle que soit la fonction f. Montrons-la. Soit $x \in \mathbb{R}$. On doit montrer l'existence d'un réel y, qui peut parfaitement dépendre de x, tel que $f(x) = f(y)$. On voit que si l'on prend $y = x$, la condition est remplie !
L'assertion (ii) exprime que f est constante. En effet, si elle est vraie, elle nous permet de choisir un réel y tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$. Cela signifie que tout réel x a pour image $f(y)$, c'est-à-dire que f est constante et égale à $f(y)$.

Remarque ($\exists\forall \Rightarrow \forall\exists$). (Passer cette remarque en première lecture.) Si l'on a une assertion $P(x, y)$ dépendant de deux variables parlantes x et y dans des ensembles E et F, considérons les assertions :

(a) $\forall x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x, y)$;

(b) $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x, y)$.

On a alors l'implication : (b)$\Rightarrow$(a). En effet, supposons l'assertion (b) vraie. Il existe donc un élément de F, que l'on va noter y_0 (plutôt que le mutique y de l'assertion, c'est libre !) tel que : $\forall x,\ P(x, y_0)$. Prouvons (a). Soit $x \in E$. On cherche un élément y de F tel que $P(x, y)$. Or on sait que $P(x, y_0)$ est vraie, de sorte que l'on peut choisir $y = y_0$. C'est gagné.
En termes moins choisis : s'il y a un y qui convient pour tous les x (c'est notre y_0), il y a un y pour chaque x : évident, non ? (Fin de la remarque.)

Remarque (place des quantificateurs). On lit parfois des phrases comme :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

avec les quantificateurs placés en fin de formule. Cela peut être parce que l'auteur a oublié de préciser où vivait n au début de la phrase et qu'il veut finalement le rendre explicite ; ou parce qu'il a voulu mettre l'accent sur la formule plutôt que sur le quantificateur qui allait de soi.
Attention : lorsqu'il y a plusieurs quantificateurs, c'est entre périlleux et suicidaire. Par exemple, l'assertion : $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = y,\ \forall y \in \mathbb{R}^+$ n'a pas de sens. Si on lit : $\big(\exists x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 = y\big),\ \forall y \in \mathbb{R}^+$, on a une phrase mal écrite mais vraie : tout réel positif y possède une racine carrée x. Mais si on lit $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \big(x^2 = y,\ \forall y \in \mathbb{R}^+\big)$, la phrase devient fausse : il n'existe aucun nombre x qui dont le carré est simultanément égal à tous les réels positifs y, bien sûr.

Si l'empilement des quantificateurs complique l'interprétation, écrire (et simplifier) la négation d'une assertion est un exercice purement formel (mais qu'il faut savoir faire en L1, pour les notions de continuité ou d'indépendance linéaire).

Exemple. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On va écrire la négation de [6]

$$P : \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - 1| \leqslant \alpha \Rightarrow \big|f(x) - f(1)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Dans l'assertion P, la seule variable libre est f et elle est définie par le contexte ; les variables ε, α et x sont muettes. L'assertion P est de la forme $\forall \varepsilon > 0,\ Q(\varepsilon)$. Cela signifie : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ Q(\varepsilon)$. La négation de P est donc : $\exists \varepsilon > 0,\ \mathrm{non}\big(Q(\varepsilon)\big)$ – et pas, bien sûr : $\forall \varepsilon \leqslant 0,\ \mathrm{non}\big(Q(\varepsilon)\big)$; en effet, la négation d'une assertion qui parle de tous les réels strictement positifs doit être une assertion qui parle des réels strictement positifs et pas d'une autre catégorie de nombres ! Bref :

$$\mathrm{non}(P) : \quad \exists \varepsilon > 0,\ \mathrm{non}\Big(\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - 1| \leqslant \alpha \Rightarrow \big|f(x) - f(1)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

6. Cette phrase deviendra familière plus tard : elle traduit la continuité de f en 1 ; mais le sens n'a pas d'importance ici.

On doit donc nier l'assertion

$$Q(\varepsilon) : \quad \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow \big|f(x) - f(1)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Comme $Q(\varepsilon)$ est de la forme : $\exists \alpha > 0,\ R(\alpha)$, avec

$$R(\alpha) : \quad \forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow \big|f(x) - f(1)\big| \leqslant \varepsilon,$$

où on a fait passer ε dans le contexte pour simplifier la notation. Sa négation est donc : $\forall \alpha > 0,\ \mathrm{non}\big(R(\alpha)\big)$. Comme $R(\alpha)$ est de la forme $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x)$, sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ \mathrm{non}(S(x))$. On doit finalement écrire la négation de

$$S(x) : \quad |x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow \big|f(x) - f(1)\big| \leqslant \varepsilon.$$

C'est une implication (disons $T \Rightarrow U$), la négation est donc (T et $\mathrm{non}(U)$) :

$$\mathrm{non}\, S(x) : \quad |x-1| \leqslant \alpha \text{ et } \big|f(x) - f(1)\big| > \varepsilon.$$

On réemboîte tout ça :

$$\begin{aligned} \mathrm{non}\, R(\alpha) : &\quad \exists x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant \alpha \text{ et } \big|f(x) - f(1)\big| > \varepsilon; \\ \mathrm{non}\, Q(\varepsilon) : &\quad \forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant \alpha \text{ et } \big|f(x) - f(1)\big| > \varepsilon; \\ \mathrm{non}\, P : &\quad \exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant \alpha \text{ et } \big|f(x) - f(1)\big| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Récrivons P et $\mathrm{non}(P)$ l'une en-dessous de l'autre pour voir que c'est très automatisable :

$$\begin{aligned} P : &\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant \alpha \Rightarrow \big|f(x) - f(1)\big| \leqslant \varepsilon \\ \mathrm{non}\, P : &\quad \exists \varepsilon > 0,\ \forall \alpha > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant \alpha \text{ et } \big|f(x) - f(1)\big| > \varepsilon. \end{aligned}$$

Exercice. Soient x et y deux réels.

— Écrire et simplifier la négation de

$$P : \quad \forall \lambda \in \mathbb{Q},\ \forall \mu \in \mathbb{Q},\ \lambda x + \mu y = 0 \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ et } \mu = 0).$$

— On suppose que $x = 1$ et $y = 4$. Prouver $\mathrm{non}(P)$.
— On suppose que $x = 1$ et $y = \sqrt{2}$. Prouver P.

III Modes de raisonnement

1° Raisonnement par l'absurde

a) Le *raisonnement par l'absurde* est une méthode de preuve qui consiste, pour prouver une assertion P, à démontrer que l'assertion $\mathrm{non}(P)$ est fausse. Pour cela, on suppose que $\mathrm{non}(P)$ est vraie, on travaille et on en déduit une contradiction – c'est-à-dire une assertion fausse.

b) Voici un exemple extrêmement simple. Soit p un entier dont le carré est pair. Alors, p est pair. En effet, supposons que p soit impair, c'est-à-dire qu'il s'écrive sous la forme $p = 2k+1$ pour k entier convenable. Alors, on aurait : $p^2 = (2k+1)^2 = 2 \times 2(k^2+k) + 1$, qui est impair. Ceci est absurde, et cette contradiction garantit que l'hypothèse « p impair » est fausse. Par conséquent, on a démontré que p est pair.

On peut emboîter cet exemple dans le suivant, déjà connu des Grecs : $\sqrt{2}$ est irrationnel. Cela signifie qu'il n'existe pas d'entiers p et q (non nul) tels que $p/q = \sqrt{2}$. En effet, supposons qu'il existe des couples de solutions (p, q). On en choisit une avec p aussi petit que possible. L'égalité

$\sqrt{2} = p/q$ équivaut à $p^2 = 2q^2$. Comme $2q^2$ est pair, on déduit du premier exemple que p est pair. Par suite, on peut écrire $p = 2p_1$ pour un entier p_1 convenable. Cela donne : $4{p_1}^2 = 2q^2$, puis $2{p_1}^2 = q^2$. On en déduit que q est pair, c'est-à-dire que $q = 2q_1$ pour q_1 entier convenable. Ainsi, partant d'une solution (p, q) avec p minimal, on en a construit une autre, (p_1, q_1), avec $p_1 < p$. Cela contredit la minimalité de p et prouve que l'existence d'une solution que nous avons supposée est fausse.

c) Voici comment on peut justifier le raisonnement : supposer que l'assertion non(P) est vraie et en déduire une assertion Q, c'est prouver l'implication non$(P) \Rightarrow Q$. Si l'on sait que Q est fausse, on est dans la deuxième ou la quatrième ligne de la table de vérité de l'implication. Mais sachant que l'implication est vraie, on élimine la quatrième ligne. Autrement dit, on est dans la deuxième : non(P) est fausse, c'est-à-dire que P est vraie par l'axiome du tiers exclu.
Un autre argument consiste à dire que non$(P) \Rightarrow Q$ donne par contraposition : non$(Q) \Rightarrow P$. Sachant que Q est fausse, *i.e.* [7] que non(Q) est vraie, on en déduit que P est vraie par déduction naturelle (*modus ponens*).
Les épistémologues en herbe retiendront que c'est l'axiome du tiers exclu qui justifie le raisonnement par l'absurde – les constructivistes se l'interdisent donc.

2° Exhaustion des cas

a) Le raisonnement *par exhaustion des cas* consiste, pour prouver une assertion Q, à faire intervenir des assertions annexes R_1 et R_2 telles que (R_1 ou R_2) est vraie. (On parle souvent de *disjonction des cas* quand les assertions R_1 et R_2 sont incompatibles *i.e.* R_1 et R_2 est fausse.) Il suffit de montrer séparément les implications $R_1 \Rightarrow Q$ d'une part, $R_2 \Rightarrow Q$ d'autre part. Justification formelle de la méthode (on note $\perp$ une assertion fausse) :

$$\begin{aligned}\big((R_1 \Rightarrow Q) \text{ et } (R_2 \Rightarrow Q)\big) &\Leftrightarrow \big((\text{non}(R_1) \text{ ou } Q) \text{ et } (\text{non}(R_2) \text{ ou } Q)\big)\\ &\Leftrightarrow \Big(\big(\text{non}(R_1) \text{ et } \text{non}(R_2)\big) \text{ ou } Q\Big)\\ &\Leftrightarrow \big(\text{non}(R_1 \text{ ou } R_2) \text{ ou } Q\big) \Leftrightarrow (\perp \text{ ou } Q) \Leftrightarrow Q.\end{aligned}$$

b) Voici un exemple. Soit n un entier. On veut montrer l'assertion Q : « $n(n+1)$ est pair ». Une façon de procéder est de distinguer les assertions R_1 : « n est pair » et R_2 : « n est impair ».
On montre $(R_1 \Rightarrow Q)$: dire que n est pair, c'est dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k$; on a alors : $n(n+1) = 2k(n+1)$, ce qui met en évidence la parité. On montre $(R_2 \Rightarrow Q)$: comme n est impair, il existe k entier tel que $n = 2k + 1$, et on a : $n(n + 1) = 2n(k + 1)$, ce qui permet de conclure.
c) Voici un autre exemple. Soit x réel, $x \geqslant 1$. On veut montrer l'équivalence

$$Q : \quad \sqrt{x-1} \geqslant x - 4 \;\Leftrightarrow\; x \leqslant \frac{9+\sqrt{13}}{2};$$

on va poser $x_1 = (9 + \sqrt{13})/2$ (x_1 vaut environ 6,3).

> Spontanément, on élèverait volontiers au carré pour se débarrasser de la racine. Mais ceci n'est utile que si l'on contrôle l'ordre des carrés, c'est-à-dire si l'on a l'équivalence $\sqrt{x-1} \geqslant x - 4 \Leftrightarrow x - 1 \geqslant (x-4)^2$. Pour cela, il vaudrait mieux ne manipuler uniquement que des nombres positifs pour utiliser les variations (connues) de la fonction carré. Cela suggère de distinguer les cas $x - 4 \geqslant 0$ et $x - 4 \leqslant 0$.

Premier cas : $x \leqslant 4$. Alors, on a : $\sqrt{x-1} \geqslant 0 \geqslant x - 4$ et $x \leqslant 4 < x_1$. L'équivalence Q est vraie puisque les deux assertions qui la composent sont vraies.

7. L'abréviation *i.e.* signifie *id est*, c'est-à-dire *c'est-à-dire*.

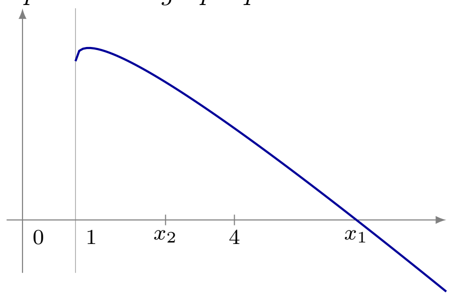
Deuxième cas : $x \geqslant 4$. Alors on a, puisque la fonction « élévation au carré » $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1} \geqslant x-4 &\Leftrightarrow x-1 \geqslant (x-4)^2 && \text{car } t \mapsto t^2 \text{ est strictement croissante}\\
&\Leftrightarrow x^2 - 9x + 17 \leqslant 0 && \text{(développer, simplifier)}\\
&\Leftrightarrow (x-x_1)(x-x_2) \leqslant 0 && \text{(calculer le disriminant } \Delta\text{, etc.),}
\end{aligned}$$

où x_1 a été défini plus haut et $x_2 = (9-\sqrt{13})/2 \simeq 2{,}7$. Comme on a supposé que $x \geqslant 4$, on en déduit que $x - x_2 > 0$, si bien qu'il vient :

$$\sqrt{x-1} \geqslant x-4 \Leftrightarrow x \leqslant x_1.$$

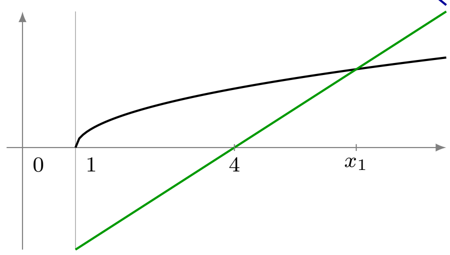
Interprétation : Soit R_1 l'assertion $x \geqslant 4$ et R_2 l'assertion $x \leqslant 4$. On vient de montrer les deux implications $R_1 \Rightarrow Q$ et $R_2 \Rightarrow Q$ par deux méthodes différentes (c'est d'ailleurs ce qui justifie d'avoir introduit les hypothèses supplémentaires R_1 et R_2). Cela prouve Q.
Interprétations graphiques :



Graphe de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x-1} - (x-4) \quad (x \geqslant 1)$.

On voit que l'inégalité $\sqrt{x-1} \geqslant x-4$ est vraie exactement lorsque $x \leqslant x_1$.

La valeur 4 ne joue aucun rôle pour Q (x_2 non plus) mais elle est commode pour la preuve.



Graphes des fonctions g et h définies par $g(x) = \sqrt{x-1}$ et $h(x) = x-4$ pour $x \geqslant 1$.

La valeur 4 sépare les abscisses x où l'inégalité $g(x) \geqslant h(x)$ est vraie « pour des raisons évidentes » (cas $x \leqslant 4$) de celles où il faut calculer (cas $x \geqslant 4$).

d) Voici l'esquisse d'un autre exemple : on choisit u_0 réel positif et on définit une suite (u_n) par : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. On peut montrer (Q) : « la suite (u_n) converge » de la façon suivante. On introduit $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, solution positive de $\ell = \sqrt{\ell+1}$ et les assertions : $R_1 : u_0 \in [0,\phi]$ et $R_2 : u_0 \in [\phi, +\infty[$. Pour montrer que $R_1 \Rightarrow Q$ (resp. [8] $R_2 \Rightarrow Q$), on commence par montrer par récurrence que l'on a pour tout n les inégalités : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \phi$ (resp. $\phi \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$) et l'on conclut grâce aux théorèmes classiques sur les suites (que l'on (re)verra en analyse dans quelques semaines).
e) Voici une variante. Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$, on invente des assertions R_1 et R_2 telles que R_1 ou R_2 est vraie et l'on démontre les deux implications : (P et R_1) $\Rightarrow Q$ d'une part, (P et R_2) $\Rightarrow Q$ d'autre part. La justification est analogue et laissée en exercice.
Bien sûr, on peut étendre la méthode à plus de deux cas, c'est-à-dire à plus de deux assertions R_i. Par exemple, fixons a, b et c réels avec $a \neq 0$. Pour démontrer l'assertion Q : « il existe au plus deux réels x tels que $ax^2+bx+c=0$ », il est utile d'introduire $R_1 : b^2-4ac > 0$; $R_2 : b^2-4ac = 0$ et $R_3 : b^2-4ac < 0$.

8. L'abréviation *resp.* signifie *respectivement*. La phrase veut dire : « Pour montrer que $R_1 \Rightarrow Q$, on commence par montrer par récurrence que l'on a pour tout n les inégalités $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \phi$; pour montrer que $R_2 \Rightarrow Q$, on commence par montrer par récurrence que l'on a pour tout n les inégalités $\phi \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. »

3° Raisonnement par récurrence

a) Principe

Soit $H(n)$ une assertion qui dépend d'une variable n et qui a un sens dans un contexte donné lorsqu'on remplace n par un entier naturel. On suppose que :

(i) l'assertion $H(0)$ est vraie ;

(ii) pour tout n entier, si $H(n)$ est vraie, alors $H(n+1)$ est vraie.

Alors, $H(n)$ est vraie pour tout n.
Récrivons cela en symboles :

$$\begin{cases} H(0) \text{ et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(n+1) \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\forall n \in \mathbb{N},\ H(n)\big).$$

En pratique, une preuve par récurrence se rédige commodément de la façon suivante :

— « Initialisation. Prouvons $H(0)$. [...] Ainsi, $H(0)$ est vraie.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ est vraie et prouvons $H(n+1)$. Alors [...] Donc $H(n+1)$ est vraie. Comme l'entier n est quelconque, on a prouvé : $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(n+1)$.

— Conclusion. On a prouvé $H(0)$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ H(n) \Rightarrow H(n+1)$. Par récurrence, $H(n)$ est vraie pour tout entier n. »

Les parties en gris sont généralement sous-entendues.

Remarque. Oui ! La démonstration par récurrence est une vraie méthode de démonstration. Elle ne consiste pas à supposer que $H(n)$ est vraie pour tout n et à en déduire fièrement... que $H(n)$ est vraie pour tout n. Cela ne démontrerait rien du tout, bien sûr.
Le point clé, c'est qu'en supposant $H(n)$ vraie et en prouvant $H(n+1)$, ce que l'on démontre, c'est exactement *l'implication* $H(n) \Rightarrow H(n+1)$. Or affirmer que cette implication est vraie, cela ne présuppose pas que $H(n)$ est vraie, voir le § I4° ci-dessus.

b) Justification

Idée clé. Informellement, on a $H(0)$. Or, on sait que de plus que $H(0) \Rightarrow H(1)$, d'où l'on déduit $H(1)$. Or, on sait de plus que $H(1) \Rightarrow H(2)$, d'où l'on déduit $H(2)$. Or, on sait de plus que $H(2) \Rightarrow H(3)$, d'où l'on déduit $H(3)$. Et ainsi de suite. L'idée, c'est que la propriété $H(n)$ ne peut pas commencer à devenir fausse. Mais on veut formaliser.

Introduisons l'ensemble A des entiers naturels p pour laquelle la propriété $H(p)$ est fausse. Par exemple, on est sûr que 0 n'est pas un élément de A puisque $H(0)$ est vraie. On veut montrer que A est vide. Par l'absurde, supposons que ce n'est pas le cas. Alors, il possède un plus petit élément [9] que l'on note p_0. On a vu l'inégalité : $p_0 \geqslant 1$ (puisque 0 n'est pas dans A puisque $H(0)$ est vraie). Donc $p_0 - 1$ est un entier naturel. Il n'appartient pas à A puisque sinon, $p_0 - 1$ serait un élément de A strictement plus petit que p_0, ce qui contredit la minimalité de p_0. Cela signifie que $H(p_0 - 1)$ est vraie. Mais on a, par hypothèse, l'implication $H(p_0 - 1) \Rightarrow H(p_0)$. On en déduit que $H(p_0)$ est vraie, ce qui contredit le fait que p_0 appartient à A. Cette absurdité montre que notre hypothèse (A n'est pas vide) est fausse.

Exemple. Montrons que pour tout naturel n, on a :

$$H(n) : \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

9. C'est, sous l'hypothèse que A n'est pas vide, « le moment où la propriété commence à devenir fausse ».

Initialisation : $H(0)$ est vraie puisque l'on a : $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0^2$ et $0 \times (0+1) \times (2 \times 0 + 1)/6 = 0$.
Hérédité : soit n entier naturel. Supposons $H(n)$ vraie. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 && \text{par définition}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{par } H(n)\\
&= \frac{n+1}{6}\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) && \text{en factorisant}\\
&= \frac{n+1}{6}\big((n+2)(2n+3)\big) && \text{après calculs.}
\end{aligned}$$

On reconnaît $H(n+1)$. Cela prouve que pour tout n, l'implication $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ est vraie.
Ainsi, par récurrence, on a montré que $H(n)$ est vraie pour tout n.

c) Deux variantes mineures

De n à $n+1$ ou de $n-1$ à n ?
Comme on veut ! Voici une évidence : l'assertion « $\forall n \geqslant 0,\ H(n) \Rightarrow H(n+1)$ » est équivalente à l'assertion « $\forall n \geqslant 1,\ H(n-1) \Rightarrow H(n)$ » (ah ?). Aussi, si l'on préfère – la forme des données peut le justifier – on peut rédiger l'hérédité ainsi : « Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On suppose que $H(n-1)$ est vraie. [...] On en déduit que $H(n)$ est vraie. »

Récurrence « à partir d'un certain rang »
Reprenons une assertion $H(n)$ dépendant d'une variable libre n. Si l'assertion $H(n_0)$ est vraie pour un certain entier n_0 et si, pour tout $n \geqslant n_0$, on a l'implication $H(n) \Rightarrow H(n+1)$, alors l'assertion $H(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
Voici deux façons de le justifier. On peut facilement adapter le raisonnement ci-dessus (exercice). Ou bien on peut noter $K(p)$ l'assertion $H(p+n_0)$. Les hypothèses sur $H(n)$ expriment que $K(0)$ est vraie (c'est $H(n_0)$!) et que pour tout p entier, on a : $K(p) \Rightarrow K(p+1)$ (vérifier !). Ainsi, $K(p)$ est vraie pour tout p donc $H(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (pourquoi ?).
Voici une tautologie qui résume la récurrence en symboles : $H(n)$ et n_0 étant donnés :

$$\begin{cases} H(n_0) \text{ et} \\ \forall n \geqslant n_0,\ H(n) \Rightarrow H(n+1) \end{cases} \Longrightarrow \quad \forall n \geqslant n_0,\ H(n).$$

d) « Récurrence forte »

L'idée de la récurrence consiste, pour montrer une propriété au rang $n+1$, à prouver que c'est une conséquence de la même propriété au rang n. Mais parfois, on voit que ce qui serait utile, c'est la propriété à un rang strictement plus petit. L'exemple suivant, typique, montre une limite de la récurrence.

Exemple. Notons $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrons, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'assertion [10]

$$H(n) : \quad \exists r \in \mathbb{N}^*,\ \exists (p_1, \ldots, p_r) \in \mathscr{P}^r,\ n = p_1 p_2 \cdots p_r.$$

Tradution : l'entier n peut s'écrire comme produit de nombres premiers. On essaie une récurrence. L'assertion $H(2)$ est vraie, puisque 2 est premier – on peut prendre $r = 1$ et $p_1 = 2$, cela donne

10. Décryptage : « $\exists (p_1, \ldots, p_r) \in \mathscr{P}^r$, » signifie « il existe une liste ordonnée finie de r nombres premiers $(p_1, \ldots, p_r)$ telle que ». Cela sera un peu précisé dans le chapitre sur les ensembles.

bien : $2 = p_1$. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $H(n)$ soit vraie et prouvons $H(n+1)$. Considérons $n+1$. Si c'est un nombre premier, on pose $r=1$ et $p_1 = n+1$, ce qui prouve $H(n+1)$. Sinon, c'est qu'il possède un diviseur d strictement compris entre 1 et $n+1$. Soit e l'entier tel que $n+1 = de$. Problème : à ce stade, nous sommes bloqués. Comme [11] $d < n$ et $e < n$, l'hypothèse de récurrence ne nous sert à rien. (Fin provisoire de l'exemple.)

Comment y remédier ? C'est le rôle de la récurrence dite « forte ». Pour prouver la propriété au rang $n+1$, au lieu de supposer qu'elle est vraie au rang précédent, on suppose qu'elle est vraie *jusqu'au* rang précédent. Les hypothèses sont donc que la propriété est vraie pour $n=0$ et que pour tout entier n, si elle l'est pour tout k compris entre 0 et n, alors elle l'est pour $n+1$. On fait donc, en apparence du moins, une hypothèse plus forte (d'où le nom ?) ; en réalité, un jeu d'écriture va ramener à la récurrence habituelle.

Proposition. *Soit $H(n)$ une assertion dans laquelle n est une variable libre. On suppose que*
— *l'assertion $H(0)$ est vraie*
— *pour tout n, si les assertions $H(0),\ldots, H(n)$ sont vraies, alors $H(n+1)$ est vraie* [12].
Alors, pour tout entier n, $H(n)$ est vraie.

Voici une reformulation en symboles.

Proposition. *Soit $H(n)$ une assertion dans laquelle n est une variable libre.*

$$\begin{cases} H(n_0) \text{ et} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \big(H(0) \text{ et } H(1) \text{ et } \cdots \text{ et } H(n)\big) \Rightarrow H(n+1) \end{cases} \implies \quad \forall n \geqslant n_0,\ H(n).$$

Démonstration. On prouve, par récurrence sur l'entier n, l'assertion $K(n)$ définie[10] par : $\big(H(0) \text{ et } H(1) \text{ et } \cdots \text{ et } H(n)\big)$. Par exemple, $K(0)$ est $H(0)$: elle est donc vraie par hypothèse. Soit n entier, supposons que $K(n)$ est vraie et prouvons $K(n+1)$. On doit donc prouver $\big(H(0) \text{ et } H(1) \text{ et } \cdots \text{ et } H(n) \text{ et } H(n+1)\big)$, c'est-à-dire $\big(K(n) \text{ et } H(n+1)\big)$. Or, on a supposé que $K(n)$ est vraie et l'on sait que $K(n) \Rightarrow H(n+1)$, d'où l'on déduit que $H(n+1)$ est aussi vraie. Cela prouve $K(n+1)$. Ainsi, par récurrence, on a démontré que $K(n)$ est vraie pour tout n. Mais par définition de $K(n)$, cela entraîne que $H(n)$ est vraie pour tout n. $\square$

Voici la structure d'une rédaction type :
— « Initialisation. Prouvons $H(0)$. [...] Ainsi, $H(0)$ est vraie.
— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout k compris entre 0 et n, $H(k)$ est vraie. Alors [...] Donc $H(n+1)$ est vraie.
— Conclusion. Par récurrence, $H(n)$ est vraie pour tout n. »

Exemple. Reprenons l'exemple de la factorisation. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $H(k)$ soit vraie pour tout k compris entre 2 et n et prouvons $H(n+1)$. Si $n+1$ est un nombre premier, on pose $r=1$ et $p_1 = n+1$, ce qui prouve $H(n+1)$. Sinon, $n+1$ possède un diviseur d strictement compris entre 1 et $n+1$. Soit e l'entier tel que $n+1 = de$. Les entiers d et e sont compris entre 2 et n donc il existe r et s et des nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$, $q_1, \ldots, q_s$ tels que $d = p_1 \cdots p_r$ et $e = q_1 \cdots q_s$. On a alors : $n+1 = de = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$. C'est une expression de $n+1$ comme produit de nombres premiers [13]. On conclut par récurrence (forte).

11. En effet, comme $d < n+1$, on a $e \geqslant 2$, donc $d \leqslant d(e-1) \leqslant de - e \leqslant n+1-2$. Idem en permutant d et e.
12. Autrement dit : pour tout entier n, si pour tout entier k compris entre 0 et n, l'assertion $H(k)$ est vraie, alors $H(n+1)$ est vraie.
13. Pour avoir formellement l'assertion $H(n+1)$, on prend $t = r+s$, $p_j = q_{j-r}$ pour j entre $r+1$ et $r+s$ de sorte à retrouver : $n+1 = p_1 \cdots p_r p_{r+1} \cdots p_t$, comme souhaité.

e) Récurrence forte à partir d'un certain rang
Soit n_0 un entier. Il y a une variante évidente où l'on remplace les hypothèses par : $H(n_0)$ et que pour tout $n \geqslant n_0$, on a : $\big(H(n_0+1)$ et $H(n_0+1)$ et $\cdots$ et $H(n)\big) \Rightarrow H(n+1)$. On peut alors conclure : $H(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Mise en garde. *Attention à l'initialisation dans les récurrences « fortes » !*

Exemple (les fantômes écossais revisités). On va « montrer », pour tout n entier, l'assertion $H(n)$: $2^n = (-1)^n$. Suspect, n'est-ce pas ?
Initialisation : $H(0)$ est vraie, vu que $2^0 = 1 = (-1)^0$. Soit n un entier naturel non nul. On suppose $H(k)$ est vraie pour tout k compris entre 0 et n. On calcule alors :

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n = 2^n + 2 \times 2^{n-1} && \text{par vérification directe} \\ &= (-1)^n + 2 \times (-1)^{n-1} && \text{par } H(n) \text{ et } H(n-1) \\ &= (-1)^n \times (1-2) && \text{en factorisant } (-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Il est évident que le raisonnement est faux. Mais où ? C'est simple : lorsque n est un entier naturel, il n'est pas toujours vrai que $n-1$ en est un aussi. Le cas $n = 0$ pose problème. Ici, c'est essentiel : on n'a pas le droit d'appliquer $H(n-1)$ lorsque $n = 0$. Le calcul ci-dessus prouve l'implication $\big(H(0)$ et $\cdots H(n)\big) \Rightarrow H(n+1)$ pour tout n... sauf $n = 0$. Et heureusement, puisque $H(1)$ est l'assertion fausse « $-1 = 2$ ».