Université Claude Bernard–Lyon I
L1 de Mathématiques : Algèbre I
Année 2012–2013

Géométrie dans l'espace

I Opérations vectorielles

1° Points et vecteurs, opérations linéaires

a) Points et vecteurs

On prend comme modèle de l'espace $\mathbb{R}^3$. Les éléments de $\mathbb{R}^3$ seront donc considérés de temps en temps comme des points, de temps en temps comme des vecteurs. Dans ce texte, on notera un élément sous la forme (x, y, z) mais il est conseillé, si la place sur le papier n'est pas un problème, de préférer une notation en colonne (un exemple ci-dessous).
Étant donnés deux points $A = (x_A, y_A, z_A)$ et $B = (x_B, y_B, z_B)$, on leur associe un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$ en posant :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Remarque. Pour chaque fois que pour tout point $A = (x_A, y_A, z_A)$ et tout vecteur $v = (x_v, y_v, z_v)$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = v$: c'est $B = (x_A + x_v, y_A + y_v, z_A + z_v)$. Si v est fixé et A varie, on appelle l'application qui à A associe B la *translation* de vecteur v.

b) Somme de deux vecteurs, produit d'un scalaire par un vecteur

Définition. Soient $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ deux vecteurs et λ un réel. On appelle *somme* de v et v' le vecteur $v + v' = (x + x', y + y', z + z')$. On appelle *produit du scalaire λ par le vecteur v* le vecteur $\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.
On appelle *combinaison linéaire* de v et v' tout vecteur de la forme $\lambda v + \lambda' v'$ où λ et λ' sont des réels. Autrement dit, un vecteur w est combinaison linéaire de v et v' s'il existe des réels λ et λ' tels que $w = \lambda v + \lambda' v'$.

Proposition. *Les opérations somme de deux vecteurs et produit d'un scalaire par un vecteur satisfont aux mêmes règles de calcul que leurs analogues dans le plan.*

On ajoutera les quantificateurs qui manquent pour donner un sens aux relations : $(v + v') + v'' = v + (v' + v'')$, $v + v' = v' + v$, $v + \overrightarrow{0} = v = \overrightarrow{0} + v$ où $\overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$, $v + (-v) = \overrightarrow{0} = (-v) + v$ où $-v = (-x, -y, -z)$ si $v = (x, y, z)$, $\lambda(v + v') = \lambda v + \lambda v'$, $(\lambda + \lambda')v = \lambda v + \lambda' v$, $1v = v$, $(\lambda\lambda')v = \lambda(\lambda' v)$.

2° Colinéarité et produit vectoriel

a) Vecteurs colinéaires

Définition. Soit v et v' deux vecteurs. On dit qu'ils sont *colinéaires* s'il existe deux réels λ et λ' pas tous les deux nuls (c'est-à-dire que $\lambda \neq 0$ ou $\lambda' \neq 0$) tels que $\lambda v + \lambda' v' = \overrightarrow{0}$.

Remarque. Avec les notations de la définition, v et v' sont colinéaires SSI il existe α réel tel que $v = \alpha v'$ ou $v' = \alpha v$. En effet, si $\lambda v + \lambda' v' = \overrightarrow{0}$ et si, par exemple, $\lambda \neq 0$, on peut écrire $v' = \alpha v$ avec $\alpha = -\lambda'/\lambda$. Inversement, si $v' = \alpha v$, alors $\lambda = -\alpha$ et $\lambda' = 1$ conviennent.

Proposition. *Soit $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux vecteurs. Alors, v_1 et v_2 sont colinéaires si et seulement si*

$$z_1 y_2 - y_1 z_2 = 0 \text{ et } z_1 x_2 - x_1 z_2 = 0 \text{ et } x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0.$$

b) Produit vectoriel

Définition. Soit v_1 et v_2 deux vecteurs. On définit leur *produit vectoriel* comme le vecteur :

$$v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Soient $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$, on a :

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 = -e_2 \wedge e_1, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 = -e_3 \wedge e_2, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2 = -e_1 \wedge e_3.$$

Remarque. Le critère de colinéarité se reformule ainsi : deux vecteurs sont colinéaires SSI leur produit vectoriel est nul.
On a vu en amphi un moyen mnémotechnique pour retrouver le produit vectoriel (voir règle de Sarrus ci-dessous).

Remarque. Le produit vectoriel présente plus qu'une analogie avec le déterminant 2×2... De fait, on peut lire les coordonnées du produit vectoriel comme les aires des parallélogrammes projetés sur les plans de coordonnées.

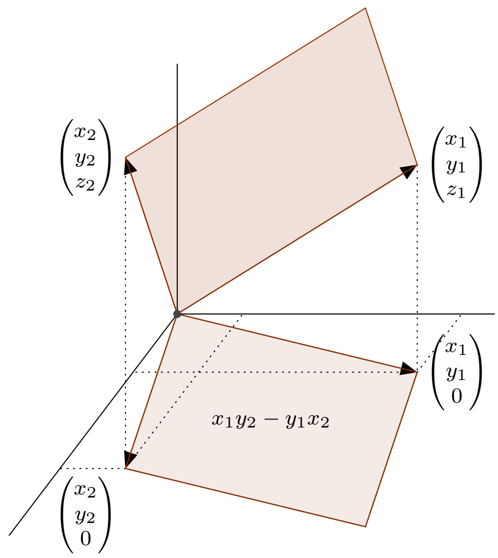


Figure 1 – Coordonnées du produit vectoriel et aire des parallélogrammes projetés

Proposition (Propriétés formelles du produit vectoriel)**.** *Soit v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs, λ_1, λ_2 et λ_3 des scalaires. On a :*

(i) $(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \wedge v_3 = \lambda_1 v_1 \wedge v_2 + \lambda_2 v_2 \wedge v_3$ *;*

(ii) $v_1 \wedge (\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) = \lambda_2 v_1 \wedge v_2 + \lambda_3 v_1 \wedge v_3$ *;*

(iii) $v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ *;*

(iv) $v_1 \wedge v_1 = \overrightarrow{0}$*,*

(v) *plus précisément,* $v_1 \wedge v_2 = \overrightarrow{0}$ *si et seulement si* v_1 *et* v_2 *sont colinéaires.*

Les assertions (i) et (ii) expriment qu'on peut « développer » un produit vectoriel et « sortir les scalaires » : plus formellement, on parle de *application bilinéaire.* Le mot qui décrit l'assertion (iii) est *application antisymétrique* ; celui pour l'assertion (iv) est *forme alternée* ; on voit que (iii)$\Rightarrow$(iv) en prenant $v_1 = v_2$; on voit que (iv)$\Rightarrow$(iii) en développant $\overrightarrow{0} = (v_1 + v_2) \wedge (v_1 \wedge v_2)$.

3° Produit scalaire

a) *Basics*

Définition. Soit v_1 et v_2 deux vecteurs. On définit leur *produit scalaire* comme le réel, noté $\langle v_1, v_2\rangle$ ou $v_1 \cdot v_2$, suivant :

$$\langle v_1, v_2\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

On dit que deux vecteurs sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul.

Exemple. Si v_1 et v_2 sont deux vecteurs quelconques, on a : $\langle v_1, v_1 \wedge v_2\rangle = 0 = \langle v_2, v_1 \wedge v_2\rangle$. (Vérifier !)

Proposition (Propriétés formelles du produit scalaire)**.** *Soit v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs, λ_1, λ_2 et λ_3 des scalaires. On a :*

(i) $\langle (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), v_3\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_2\rangle + \lambda_2\langle v_2, v_3\rangle$ *;*

(ii) $\langle v_1, (\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3)\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle + \lambda_3\langle v_1, v_3\rangle$ *;*

(iii) $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_2, v_1\rangle$ *;*

(iv) $\langle v_1, v_1\rangle \geq 0$*,*

(v) $\langle v_1, v_1\rangle = 0$ *si et seulement si* $v = \overrightarrow{0}$*.*

Les assertions (i) et (ii) expriment que le produit scalaire est, comme le produit vectoriel, *bilinéaire*. L'assertion (iii) se résume par le mot *symétrique*. Les assertions (iv) et (v) se disent *définie positive*.

b) Norme et distance

Définition. Soit v un vecteur. On appelle *norme* de v le réel : $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. (Cela a un sens grâce à l'assertion (iv) de la proposition précédente.)
Soit A et B deux points. On appelle *distance* entre A et B le réel : $AB = ||\overrightarrow{AB}||$.

Exercice. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité triangulaire (plus dur que dans le plan).

4° Déterminant et produit mixte

a) Produit mixte : *basics*

Définition. Soient v_1, v_2 et v_3 trois vecteurs. Leur *produit mixte* est le réel noté $[v_1, v_2, v_3]$ et défini par :

$$[v_1, v_2, v_3] = \langle v_1 \wedge v_2, v_3\rangle.$$

Remarque. Le produit mixte de trois vecteurs est aussi appelé *déterminant* de ces trois vecteurs (dans la base canonique). Si $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, etc., on le note aussi :

$$[v_1, v_2, v_3] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Pour le calculer, on peut utiliser la *règle de Sarrus*, consistant à copier la première et la deuxième lignes sous le tableau ci-dessus, puis à ajouter les diagonales et à soustraire les anti-diagonales.

$$\begin{array}{|ccc|} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array} = \begin{array}{l} x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 \\ - z_1y_2x_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3 \end{array}$$

Proposition (Propriétés formelles du produit mixte)**.** *Soient* v_1*,* v_2*,* v_3*,* v_1' *des vecteurs et* λ*,* λ_1*,* λ_1' *des scalaires. On a :*

(i) $[v_1, v_2, v_3] = \langle v_1, v_2 \wedge v_3\rangle$ *;*

(ii) $[v_1, v_2, v_3] = [v_2, v_3, v_1] = [v_3, v_1, v_2] = -[v_1, v_3, v_2] = -[v_3, v_2, v_1] = -[v_2, v_1, v_3]$ *;*

(iii) $[\lambda_1 v_1 + \lambda_1' v_1', v_2, v_3] = \lambda_1[v_1, v_2, v_3] + \lambda_1'[v_1, v_2, v_3]$*, idem avec les autres composantes ;*

(iv) *en particulier :* $[\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3] = \lambda^3[v_1, v_2, v_3]$.

L'assertion (ii) exprime que si on permute les vecteurs de toutes les façons possibles, le produit mixte ne prend que deux valeurs, opposées l'une de l'autre ; plus précisément, si on fait une permutation circulaire, le produit mixte ne change pas ; si on permute deux vecteurs, il change de signe.

b) Produit mixte et volume

On va voir que le produit mixte satisfait aux propriétés qu'on souhaite pour calculer le volume d'un parallélépipède. Parlons intuitivement et appelons $V(v_1, v_2, v_3)$ le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs v_1, v_2, v_3. Quand on multiplie une des dimensions par un scalaire (par exemple 2), on veut que le volume soit multiplié par le même scalaire. Cela donne lieu à trois formules du genre : $V(\lambda v_1, v_2, v_3) = \lambda V(v_1, v_2, v_3)$. Lorsque l'on translate la base (i.e. le parallélogramme engendré par v_1 et v_2), ce qui revient à changer v_3 en un vecteur de la forme $v_3 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, on ne doit pas changer le volume ; cela donne : $V(v_1, v_2, v_3 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = V(v_1, v_2, v_3)$. À la limite, si $v_3 = \overrightarrow{0}$, cela doit continuer à marcher, ce qui donne : $V(v_1, v_2, v_1) = 0$. En remplaçant v_1 par $v_1 + v_3$, on en déduit formellement (comme pour le produit vectoriel) que $V(v_1, v_2, v_3) = -V(v_3, v_2, v_1)$, ce qui incite à parler de « volume algébrique » (i.e. muni d'un signe). En bref, le volume satisfait aux propriétés formelles du produit mixte, quoi.
Mais alors, on trouve, en injectant $v_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3$ et en développant, la relation : $V(v_1, v_2, v_3) = [v_1, v_2, v_3] \cdot V(e_1, e_2, e_3)$. Cela traduit que toute bonne notion de volume d'un parallélogramme aboutira à un multiple du produit mixte. Inversement, on comprend bien que l'on puisse multiplier une fonction volume par une constante, cela revient à changer d'unité.

II Bases et repères

1° Bases

a) Les bases sur les bases (jeu de mot un peu baseux...)

Définition. Soit (u_1, u_2, u_3) un triplet de vecteurs. On dit que c'est une *base* si, pour tout vecteur v, il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de réels tels que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$. Ce triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est appelé *triplet de coordonnées* de v dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exemple. Le triplet (e_1, e_2, e_3), où $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, est une base dite *base canonique* ou *base standard.*

Un point important, c'est qu'un vecteur est déterminé par *trois* scalaires : on parle de *dimension* 3. En pratique, en général on connaît les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, u_3 dans la base canonique et on cherche les coordonnées d'un vecteur v dans la base (u_1, u_2, u_3) : pour cela, on résout le système $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = v$. Dire qu'un triplet de vecteurs est une base, c'est dire que ce système a exactement une solution pour tout v.

b) Bases et produit mixte

Voici le seul théorème important du chapitre, à côté duquel tout le reste est verbiage.

Théorème. *Soit* (u_1, u_2, u_3) *un triplet de vecteurs. Alors la famille* (u_1, u_2, u_3) *est une base SSI son produit mixte n'est pas nul :* $[u_1, u_2, u_3] \neq 0$.

La preuve repose sur une forme déguisée des formules de Cramer, que l'on verra en deuxième année pour les systèmes linéaires.

Lemme. *Soit u_1, u_2, u_3, v quatre vecteurs. On a :*

$$[u_1, u_2, u_3]v - [u_2, u_3, v]u_1 + [u_3, v, u_1]u_2 - [v, u_1, u_2]u_3 = \overrightarrow{0}.$$

Ce lemme est une formule un peu compliquée mais sa vérification ne recèle aucune difficulté : il suffirait de l'écrire mais... on ne l'écrira pas pour autant. Passons au théorème.
DÉMONSTRATION. Supposons que $[u_1, u_2, u_3] \neq 0$ et soit v un vecteur. On a grâce au lemme :

$$v = \frac{[v, u_2, u_3]}{[u_1, u_2, u_3]}u_1 + \frac{[u_1, v, u_3]}{[u_1, u_2, u_3]}u_2 + \frac{[u_1, u_2, v]}{[u_1, u_2, u_3]}u_3,$$

ce qui donne l'existence de $\lambda_1 = [v, u_2, u_3]/[u_1, u_2, u_3]$, etc.
Pour l'unicité, procédons (salement) par l'absurde. Supposons donc qu'existent un vecteur v et deux triplets distincts $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et $(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$ tels que $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \lambda'_1 u_1 + \lambda'_2 u_2 + \lambda'_3 u_3$. Supposons par exemple que $\lambda_1 \neq \lambda'_1$. On en déduit :

$$u_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda'_2}{\lambda'_1 - \lambda_1}u_2 + \frac{\lambda_3 - \lambda'_3}{\lambda'_1 - \lambda_1}u_3,$$

puis, avec $\alpha_2 = (\lambda_2 - \lambda'_2)/(\lambda'_1 - \lambda_1)$ et $\alpha_3 = (\lambda_3 - \lambda'_3)/(\lambda'_1 - \lambda_1)$:

$$[u_1, u_2, u_3] = [\alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, u_2, u_3] = \alpha_2[u_2, u_2, u_3] + \alpha_3[u_3, u_2, u_3] = 0,$$

cette contradiction prouvant l'unicité dans le sens direct.
Inversement, supposons que $[u_1, u_2, u_3] = 0$. Montrons que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une base.
Si les trois vecteurs sont nuls, il est évident que l'on n'a pas affaire à une base : le vecteur nul a (au moins) deux écritures : $\overrightarrow{0} = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = 1u_1 + 1u_2 + 3u_3$ et le vecteur $v = (1, 0, 0)$ n'admet aucune écriture car $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \overrightarrow{0}$. On suppose, par exemple, que $u_3 \neq \overrightarrow{0}$.
Si les trois produits vectoriels $u_1 \wedge u_2$, $u_2 \wedge u_3$ et $u_1 \wedge u_3$ sont nuls, les trois vecteurs sont colinéaires : $u_1 = \alpha_1 u_3$ et $u_2 = \alpha_2 u_3$ pour α_1, α_2 réels convenables. Donc le vecteur nul a au moins deux écritures : $\overrightarrow{0} = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 = \alpha_1 u_1 + 0u_2 - u_3$. D'autre part, tout vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ est un multiple de u_3 ; si on note $u_3 = (x_3, y_3, z_3)$, l'un des vecteurs $(-y_3, x_3, 0)$, $(0, z_3, -y_3)$ et $(z_3, 0, -x_3)$ est non nul et orthogonal à u_3 donc non multiple de u_3.
On peut supposer que l'un au moins n'est pas nul, par exemple $u_2 \wedge u_3 \neq \overrightarrow{0}$. Alors, puisque

$$[u_2, u_3, u_2 \wedge u_3] = ||u_2 \wedge u_3||^2 \neq 0,$$

on sait par le début de la preuve que le triplet $[u_2, u_3, u_2 \wedge u_3]$ est une base, si bien que l'on peut exprimer u_1 sous la forme : $u_1 = \alpha_1 u_2 \wedge u_3 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$. Mais alors, l'égalité $[u_1, u_2, u_3] = 0$ et les propriétés formelles du produit mixte donnent : $0 = [u_1, u_2, u_3] = \alpha_1 ||u_2 \wedge u_3||^2$, si bien que $\alpha_1 = 0$ et que $u_1 = \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$.
Ainsi, le vecteur u_1 s'écrit de deux façons : $u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3 = 0u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$. A contrario, le vecteur $u_2 \wedge u_3$ ne peut pas s'écrire sous la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$ (essayer !). Cela nie doublement la définition d'une base et conclut la preuve du théorème.

On peut ériger une partie de la preuve en proposition bien utile.

Proposition. *Soit u_1, u_2, u_3 trois vecteurs. Si $u_2 \wedge u_3 \neq \overrightarrow{0}$ et $[u_1, u_2, u_3] = 0$, alors il existe des réels α_2 et α_3 tels que $u_1 = \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$.*

c) Bases orthonormées

Définition. On dit qu'un triplet (u_1, u_2, u_3) est une *famille orthonormée* si l'on a : $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = \langle u_3, u_1\rangle = 0$ et $||u_1|| = ||u_2 = ||u_3|| = 1$.

Proposition. *Une famille orthonormée est une base. Si* (u_1, u_2, u_3) *est une famille orthonormée, alors, pour tout vecteur* v*, on a :*

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \langle v, u_3\rangle u_3.$$

On parlera donc désormais de *bases orthonormées* plutôt que de familles orthonormées.

Démonstration. Comme u_1 et u_2 sont orthogonaux et non nuls, ils ne sont pas colinéaires (vérifier !). Par le théorème, $(u_1, u_2, u_1 \wedge u_2)$ est une base. On peut donc exprimer u_3 sous la forme $u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$. Mais alors, il vient : $\lambda_1 = \langle u_3, u_1\rangle = 0$, $\lambda_2 = \langle u_3, u_2\rangle = 0$, puis : $\lambda_3^2 = ||u_3||^2 = 1$, si bien que $u_3 = \pm u_1 \wedge u_2$. Cela permet d'en déduire que (u_1, u_2, u_3) est une base.
Soit v un vecteur. Sachant que (u_1, u_2, u_3) est une base, on peut affirmer qu'il existe des réels λ_i tels que $v = \sum_{i=1}^3 \lambda_i u_i$, alors on a, pour j compris entre 1 et 3 : $\langle v, u_j\rangle = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \langle u_i, u_j\rangle = \lambda_j$, ce qui termine la preuve.

d) Orthonormalisation

Proposition. *Soit* (v_1, v_2, v_3) *un triplet de vecteurs dont le produit mixte n'est pas nul. Il existe une base orthonormée, dont chaque vecteur est unique au signe près,* (u_1, u_2, u_3) *telle que* u_1 *et* v_1 *d'une part,* $v_1 \wedge v_2$ *et* $u_1 \wedge u_2$ *d'autre part, sont colinéaires.*

(Géométriquement, les conditions signifient que les droites engendrées par v_1 et u_1 et les plans engendrés par v_1 et v_2 d'une part, u_1 et u_2 d'autre part, coïncident.)

Démonstration. On pose : $u_1 = v_1/||v_1||$. Puis on cherche un vecteur u_2' de la forme $u_2' = v_2 + \lambda u_1$ tel que $\langle u_2', u_1\rangle = 0$. Cela donne une condition nécessaire et suffisante sur λ, à savoir : $\lambda = -\langle v_2, u_1\rangle$. Il vient : $u_1 \wedge u_2' = ||v_1||^{-1} v_1 \wedge (v_2 + \lambda u_1) = ||v_1||^{-1} v_1 \wedge v_2$. Le vecteur $v_1 \wedge v_2$ n'est pas nul, sinon on aurait : $[v_1, v_2, v_3] = 0$. En particulier, u_2' n'est pas le vecteur nul. On pose alors : $u_2 = u_2'/||u_2'||$. De la sorte, les vecteurs $v_1 \wedge v_2$ et $u_1 \wedge u_2$ sont colinéaires. De plus, on a : $||u_1|| = ||u_2|| = 1$ et $\langle u_1, u_2\rangle = 0$. On conclut en posant $u_3 = u_1 \wedge u_2$. L'unicité est laissée en exercice.
Une autre façon de s'y prendre (exercice) est la suivante : prendre $u_1' = v_1$, $u_3' = v_1 \wedge v_2$ et $u_2' = u_3' \wedge u_1'$, puis diviser ces vecteurs par leur norme.

2° Repères

a) Coordonnées dans un repère

Définition. On appelle *repère de l'espace* un quadruplet (O, u_1, u_2, u_3) formé d'un point O et d'une base (u_1, u_2, u_3). Un repère est *orthonormé* si la base qu'il contient l'est.
Étant donné un point M du plan, ses *coordonnées* dans un repère (O, u_1, u_2, u_3) est le triplet de réels $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$.

b) Changement de repère

Données. Soient $\mathcal{R} = (O, u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{R}' = (O', u_1', u_2', u_3')$ deux repères. Soit P la matrice de passage entre les deux bases : c'est un tableau 3×3 de réels dont la j^{e} colonne est la colonne des coordonnées de u_j' dans la base (u_1, u_2, u_3) :

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{où } u_j' = \sum_{i=1}^3 a_{ij} u_i \ (j = 1, 2, 3).$$

Pour M un point du plan, on note $X = (x, y, z)$ ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et $X' = (x', y', z')$ ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$. On note $X_{O'} = (x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$ les coordonnées de O' dans $\mathbb{R}$.
But. On veut une relation entre les colonnes X et X' des coordonnées d'un point M dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Proposition. *Avec les notations précédentes, on a : $X = PX' + X_{O'}$, ce qui signifie :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_{O'} \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_{O'} \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_{O'} \end{pmatrix}.$$

(En général, on connaît P et X et on cherche X' : il faut donc résoudre un système.)

Esquisse de preuve. On part de $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. On remplace : $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^3 x_i u_i$ et $\overrightarrow{O'M} = \sum_{j=1}^3 x'_j u'_j$, $\overrightarrow{OO'} = x_{O'} u_1 + \cdots$ et $u'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij} u_i$, on permute l'ordre des sommations dans $\overrightarrow{O'M}$ et on utilise l'unicité des coordonnées dans la base (u_i).

III Droites et plans et sphères de l'espace

1° Droites

Définition. Soient A un point et v un vecteur non nul. On appelle *droite* passant par A et engendrée par v et on note $D(A, v)$ l'ensemble des points M pour lesquels qu'existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda v$.
Soient A et B deux points distincts : on appelle droite passant par A et B et on note (AB) la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

On vérifie comme dans le plan que les vecteurs directeurs (qui engendrent) une droite donnée sont tous des multiples non nuls les uns des autres ; que par un point il passe une unique droite parallèle à une droite donnée, où « parallèle » signifie « ayant les mêmes vecteurs directeurs » ; et bien sûr, que $(AB) = (BA)$.
La proposition suivante est quasiment évidente. Elle donne ce qu'on appelle un *présentation paramétrique* d'une droite.

Proposition. *Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point et $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul. Alors, un point $M = (x, y, z)$ appartient à $D(A, v)$ si et seulement si*

$$(*) \qquad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + \lambda\alpha, \\ y = y_A + \lambda\beta, \\ z = z_A + \lambda\gamma. \end{cases}$$

Remarque. Inversement, la proposition signifie aussi que si on dispose de six réels x_A, y_A, z_A, α, β, γ et d'un ensemble décrit par la condition $(*)$, cet ensemble est la droite passant par $A = (x_A, y_A, z_A)$ et engendrée par $v = (\alpha, \beta, \gamma)$.

2° Plans

a) Rudiments

Définition. Soient A un point et v_1 et v_2 deux vecteurs non colinéaires (en particulier, non nuls). On appelle *plan* passant par A et engendré par v_1 et v_2 l'ensemble des points M pour lesquels existent des réels λ_1 et λ_2 tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Proposition. *Soient* $A = (x_A, y_A, z_A)$ *un point et* $v_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *et* $v_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ *deux vecteurs non nuls. Alors, un point* $M = (x, y, z)$ *appartient à* $D(A, v)$ *si et seulement si*

$$(*) \qquad \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2, \\ y = y_A + \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2, \\ z = z_A + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2, \end{cases}$$

ce qui est encore équivalent à :

$$[\overrightarrow{AM}, v_1, v_2] = \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y - y_A & \beta_1 & \beta_2 \\ z - z_A & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. La première partie est une reformulation de la définition en termes de coordonnées ; la deuxième partie résulte de la proposition de II1°b). Elles donnent respectivement une présentation paramétrique et une équation cartésienne du plan.

Proposition. *Soit* a, b, c, d *des réels tels que* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. *L'ensemble* P *des points* $M = (x, y, z)$ *tels que* $ax + by + cz + d = 0$ *est un plan.*
Soit A *un point de* P *et* v *le vecteur* $v = (a, b, c)$ *: alors* M *appartient à* P *si et seulement si* $\langle \overrightarrow{AM}, v \rangle = 0$.

Définition. On désigne P comme le *plan orthogonal à* v *passant par* A.

Démonstration. Tout d'abord, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet une solution $A = (x_A, y_A, z_A)$ (c'est-à-dire que P n'est pas vide). En effet, l'un des réels a, b, c n'est pas nul ; si par exemple $b \neq 0$, on prend $x_A = z_A = 0$ et $y_A = -d/b$. Les équations $ax + by + cz = d$ et $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ donnent par soustraction : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, ce qui se traduit par : $\langle \overrightarrow{AM}, v \rangle = 0$ où $v = (a, b, c)$. Cela prouve la deuxième partie.
Soit v_1 un vecteur non nul orthogonal à v (par exemple, $(-b, a, 0)$ ou $(-c, 0, a)$ ou $(0, -c, b)$ ou $w \wedge v$ avec w non nul non colinéaire à v) et $v_2 = v \wedge v_1$. Alors v et $v_1 \wedge v_2$ sont colinéaires et non nuls (pourquoi ?) donc les conditions $\langle \overrightarrow{AM}, v \rangle = 0$ et $\langle \overrightarrow{AM}, v_1 \wedge v_2 \rangle = 0$ sont équivalentes. Mais cette dernière s'écrit aussi : $[\overrightarrow{AM}, v_1, v_2] = 0$, ce qui décrit une équation cartésienne du plan contenant A et engendré par v_1 et v_2.

b) Position relative de deux plans

Proposition. *Soient deux plans* P *et* P' *d'équations respectives*[1] $ax + by + cz + d = 0$ *et* $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. *De deux choses l'une :*
- *soit* $v = (a, b, c)$ *et* $v' = (a', b', c')$ *sont colinéaires ; deux cas peuvent se produire :*
  - *soit les équations sont proportionnelles : il existe* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ *et* $d' = \lambda d$ *; les plans sont égaux ;*
  - *soit il existe* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *tel que* $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ *mais* $d' \neq \lambda d$ *; l'intersection des plans est vide ; les plans sont dits parallèles ;*
- *soit* $v = (a, b, c)$ *et* $v' = (a', b', c')$ *ne sont pas colinéaires : alors l'intersection de* P *et* P' *est une droite dirigée par* $v \wedge v'$.

Les démonstrations sont laissées en exercice. Il s'agit essentiellement de résoudre des systèmes, la mise en place demande du soin.

1. Il est sous-entendu que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$.

c) Géométrie dans un plan

Soit $P = P(A, v_1, v_2)$ un plan. On commence par orthonormaliser la base $(v_1, v_2, v_1 \wedge v_2)$, ce qui donne une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) telle que $P = P(A, u_1, u_2)$. Mais alors, un point de M peut se décrire sans ambiguïté par ses coordonnées dans le repère (A, u_1, u_2) du plan. Cela signifie que l'application $\iota : \mathbb{R}^2 \to P$, $m \mapsto \iota(m)$, où, pour un point $m = (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$, $\iota(m)$ est le point M de $\mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{AM} = x'u_1 + y'u_2$, est une bijection.
Mieux : si A, B, C, D sont quatre points du plan P, si $\overrightarrow{AB} = su_1 + tu_2$ et $\overrightarrow{CD} = s'u_1 + t'u_2$, alors on a : $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = ss' + tt'$, formule qui nous a servi à définir le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$.

Cela signifie simplement que l'on peut faire de la géométrie dans n'importe quel plan de $\mathbb{R}^3$ comme on l'a fait dans $\mathbb{R}^2$. Il y a une difficulté pour mesurer les angles, relative à l'orientation du plan que l'on passe sous silence.

3° Sphères

Définition. Soit A un point et r un réel positif. On appelle *sphère* de centre A et de rayon r et on note parfois $S(A, r)$ l'ensemble des points M tels que $AM = r$.

Une sphère de rayon strictement négatif est vide, une sphère de rayon nul est réduite à un point.

Exemple. La *sphère unité* est la sphère de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon 1.

Proposition. *Soit $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point et $r \in \mathbb{R}^+$. Alors, un point $M = (x, y, z)$ appartient à $S(A, r)$ si et seulement si $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$.*
Inversement, si b, c, d et e sont des réels, l'ensemble des points tels que

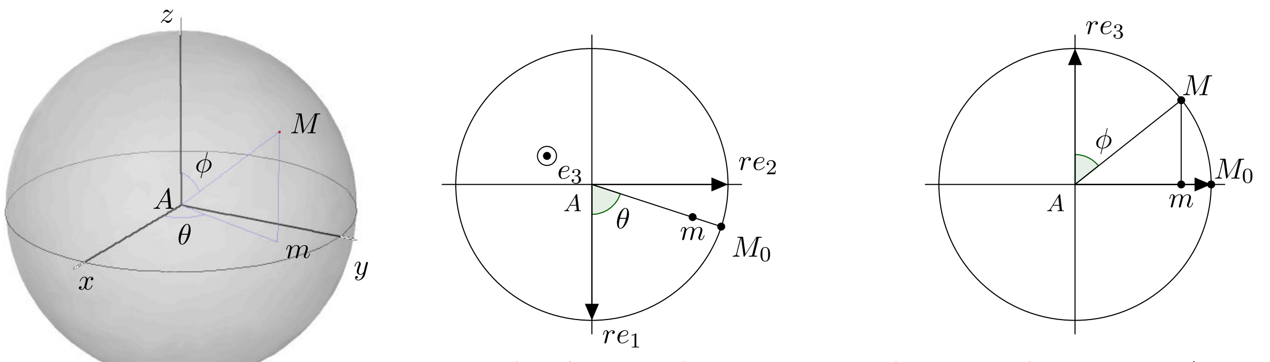
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2bx - 2cy - 2dz + e = 0$$

est la sphère de centre $A = (b, c, d)$ et de rayon $r = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2 - e}$ si ce réel est défini, et vide sinon.

Démonstration. La première partie est triviale. Pour la seconde, on écrit :

$$x^2+y^2+z^2-2bx-2cy-2dz+e = (x-b)^2+(y-c)^2+(z-d)^2-b^2-c^2-d^2+e = AM^2-(b^2+c^2+d^2-e).$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On peut donner une présentation paramétrique d'une sphère de la façon suivante.



plan équatorial — plan vertical contenant A et M

Figure 2 – Paramétrage d'une sphère : $M(\theta, \phi)$

Proposition. *Soit S la sphère de centre $A = (x_A, y_A, z_A)$ et de rayon $r > 0$. L'application*

$$[0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow S, \quad (\theta, \phi) \longmapsto (x_A + r\cos\theta\sin\phi, y_A + r\sin\theta\sin\phi, z_A + r\cos\phi)$$

est surjective ; sa restriction à $[0, 2\pi[\times]0, \pi[$ est injective.

Remarque. L'angle θ peut être appelé *longitude* de M ; quant à la *latitude*, on la mesure par rapport à l'équateur : c'est donc $\lambda = \frac{\pi}{2} - \phi$; d'après Wikipedia, on appelle ϕ la *colatitude*.

Démonstration. Soit $M = (x, y, z)$ un point de la sphère. Si $x = x_A$ et $z = z_A$, alors $M = (x_A, y_A, z_A + \varepsilon r)$ où $\varepsilon = \pm 1$, de sorte que M est l'image de $(0, 0)$ ou de $(0, \pi)$.
Sinon, soit $m = (x, y, z_A)$ la projection orthogonale de M sur le plan d'équation $z = z_A$. Soit θ un argument du complexe non nul $x - x_A + i(y - y_A)$ et ρ son module. Alors, on a : $x - x_A = \rho\cos\theta$, $y - y_A = \rho\sin\theta$. Des relations $\rho^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2 - (z - z_A)^2$, on tire l'existence de $\phi \in [0, 2\pi[$ tel que $\sin\phi = \rho/r$, et $\cos\phi = (z - z_A)/r$. Enfin, $\phi \in [0, \pi]$ car $\rho > 0$.

Exercice. Montrer que l'intersection d'une sphère et d'une droite contient 0, 1 ou 2 points. Si c'est un point, on dit que la droite est *tangente* à la sphère.
Montrer que l'intersection d'une sphère et d'un plan est vide ou bien que c'est un cercle. Si c'est un point (un cercle de rayon nul), on dit que le plan est *tangent* à la sphère.

IV Autres systèmes de coordonnées

1° Coordonnées sphériques

On considère le repère canonique de $\mathbb{R}^3$, (O, e_1, e_2, e_3). Mais au lieu d'utiliser les coordonnées cartésiennes (x, y, z), on décrit un point M par la distance $r = OM$ et les angles θ et ϕ de la proposition précédente provenant de la sphère $S(O, r)$. Voir la figure 3, où on a noté m le projeté orthogonal de M sur le plan équatorial (Oxy) (qu'est-ce ?) et, si $m \neq O$, M_0 l'intersection de la demi-droite $[Om)$ et de la sphère $S(O, r)$.

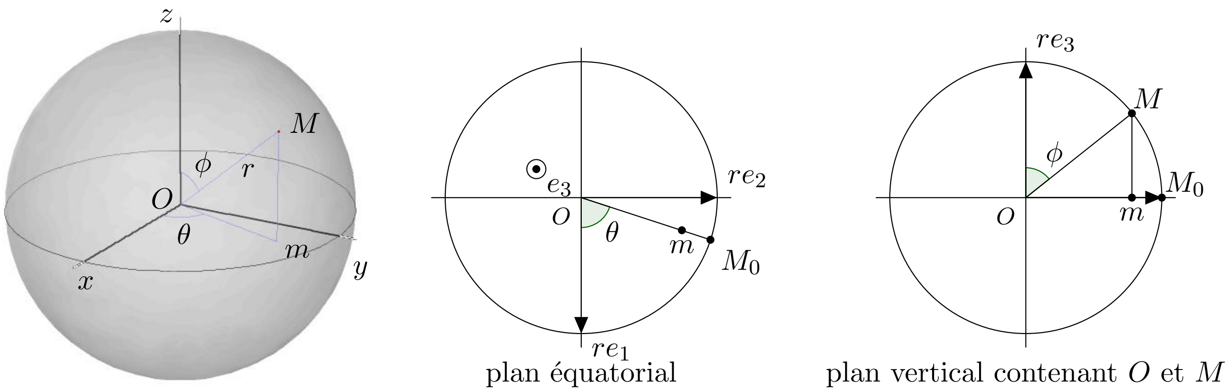


Figure 3 – Coordonnées sphériques : (r, θ, ϕ)

Proposition. *L'application*

$$\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow S, \quad (r, \theta, \phi) \longmapsto (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)$$

est surjective ; sa restriction à $\mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[\times]0, \pi[$ est injective.

Voici quelques relations qui peuvent être utiles :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \rho e^{i\theta} = x + iy, \quad z + i\rho = re^{i\phi}.$$

(Le nom provient bien sûr de ce que l'ensemble des points de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) avec r fixé est une sphère, en gris sur la figure.)

2° **Coordonnées cylindriques**

On décrit un point M par la distance $\rho = Om$ et l'angles θ de la proposition précédente et la cote z. Voir la figure 4.

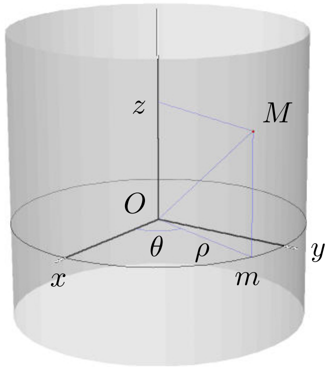


Figure 4 – Coordonnées cylindriques : (ρ, θ, z)

Proposition. *L'application*

$$\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (\rho, \theta, z) \longmapsto (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z)$$

est surjective. Sa restriction à $\mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ *est injective.*

Voici la seule relation utile :

$$x + iy = \rho e^{i\theta}.$$

(Le nom provient bien sûr de ce que l'ensemble des points de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) avec ρ fixé est un cylindre, en gris sur la figure.)