Université Claude Bernard–Lyon I
L1 de Mathématiques : Algèbre I
Année 2012–2013

Géométrie plane: résumé

Ce texte propose une construction de la géométrie plane entièrement fondée sur le calcul en coordonnées. Il n'y a pas de scoop : tout ce qui est démontré figure dans les programmes de collège ou lycée mais la démarche est différente du secondaire.

I Géométrie affine

1° Points et vecteurs

Vecteur défini par deux points. Critère d'égalité de deux vecteurs, parallélogramme, milieu. Opérations sur les vecteurs : somme (lien avec le parallélogramme), produit d'un scalaire par un vecteur (lien avec Thalès).

2° Colinéarité et déterminant

Critère de colinéarité. Déterminant, propriétés formelles, interprétation comme « aire algébrique ».

3° Bases et repères

a) Vocabulaire

Définition. On appelle *base* de $\mathbb{R}^2$ un couple de vecteurs (e_1, e_2) tel que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ puisse s'exprimer de façon unique comme combinaison linéaire de e_1 et e_2, c'est-à-dire :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2,\ \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ v = xe_1 + ye_2.$$

Pour v vecteur, le couple (x, y) tel que $v = xe_1 + ye_2$ s'appelle *coordonnées de v dans* (e_1, e_2).

Exemple : $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Les coordonnées de $v = (x_1, y_1)$ dans cette base dite *canonique* ou *standard* sont... (x_1, y_1) puisque $v = x_1e_1 + y_1e_2$.

Lemme. *Un couple de vecteurs (e_1, e_2) est une base si et seulement si* $\det(e_1, e_2) \neq 0$.

Démonstration. Soit $e_1 = (a, c)$ et $e_2 = (b, d)$. Soit $v = (x_1, y_1)$ un vecteur. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = xe_1 + ye_2$. Cela signifie :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}, \text{ ou encore } \begin{cases} ax + by = x_1 \\ cx + dy = y_1. \end{cases}$$

On a donc à résoudre un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues (x, y), avec pour paramètres (x_1, y_1).
Si $ad - bc = 0$, alors les vecteurs e_1 et e_2 sont colinéaires. Toute combinaison $xe_1 + ye_2$ appartient à la droite qu'ils engendrent, si bien qu'un vecteur hors de la droite n'aura pas d'expression de cette forme ; d'autre part, par le critère de colinéarité, il existe λ_1 et λ_2 pas tous deux nuls tels que $\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 = \overrightarrow{0} = 0e_1 + 0e_2$, ce qui contredit l'unicité pour le vecteur $v = \overrightarrow{0}$.
Si $ad - bc \neq 0$, on multiplie membre à membre la première équation par d (resp. $-c$) et la seconde par $-b$ (resp. a) : il vient $(ad - bc)x = dx_1 - by_1$ (resp. $(ad - bc)y = -cx_1 + ay_1$) : cela prouve l'unicité de (x, y). On vérifie que x et y ainsi définis sont bien solutions, d'où l'existence.

b) Repères

Définition. On appelle *repère* de $\mathbb{R}^2$ un triplet (O, e_1, e_2) où O est un point et (e_1, e_2) une base. Pour M un point de $\mathbb{R}^2$, on appelle coordonnées de M dans ce repère l'unique couple (x, y) tel que $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$ (bien défini par la propriété de base).

Exemple : $O = (0, 0)$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.

c) Changement de repère

Données : $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$ et $\mathcal{R}' = (O', e_1', e_2')$ deux repères ; M un point du plan ; $X = (x, y)$ (resp. $X' = (x', y')$) les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$). On veut relier X et X'.
Méthode : la matrice de passage P.
On note a, b, c, d les réels tels que $e_1' = ae_1 + ce_2$ et $e_2' = be_1 + ce_2$. On place ces réels dans un tableau 2×2 appelé matrice :

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On note enfin $B = (\alpha, \beta)$ les coordonnées de O' dans $\mathcal{R}$.

Proposition. *On a : $X = PX' + B$, ce qui signifie*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax' + by' + \alpha \\ cx' + dy' + \beta \end{pmatrix}, \quad \textit{ou} \quad \begin{cases} x = ax' + by' + \alpha \\ y = cx' + dy' + \beta \end{cases}$$

Démonstration. On écrit $\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2$ et $\overrightarrow{OO'} = \alpha e_1 + \beta e_2$ d'une part, et

$$\overrightarrow{O'M} = x'e_1' + y'e_2' = x'(ae_1 + ce_2) + y'(be_1 + de_2) = (ax + by)e_1 + (cx + dy)e_2.$$

Il vient donc :

$$xe_1 + ye_2 = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = (ax + by + \alpha)e_1 + (cx + dy + \beta)e_2,$$

d'où la proposition en utilisant l'unicité de l'écriture d'un vecteur comme combinaison linéaire de e_1 et e_2 (qui forment une base).

4° Droites

a) Deux façons de construire une droite

Définition. Soit A un point et v un vecteur non nul. On appelle *droite* passant par A et dirigée par v et on note $D(A, v)$ l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et v sont colinéaires.

Remarque. Par le critère de colinéarité, $M \in D(A, v)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, v) = 0$.

Lemme. (i) *Soit A et B deux points et v et w deux vecteurs non nuls. Alors $D(A, v) = D(B, w)$ si et seulement si [les vecteurs v et w sont colinéaires et $\overrightarrow{AB}$ est un multiple de v (ou w)].*
En particulier, les vecteurs directeurs de $D(A, v)$ sont les multiples non nuls de v : si w est un vecteur tel que $D(A, w) = D(A, v)$, alors w de la forme $w = \alpha v$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ convenable.
(ii) *Supposons A et B distincts. L'unique droite qui contient A et B est la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$. (c'est aussi la droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{BA}$)*

Démonstration. (i) Supposons qu'existent des réels α et β tels que $w = \alpha v$ ($\alpha \neq 0$) et $\overrightarrow{AB} = \beta v$. Alors, pour M quelconque dans le plan, on a :

$$\det(\overrightarrow{BM}, w) = \det(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}, w) = \det(\overrightarrow{AM} - \beta v, \alpha v) = \alpha \det(\overrightarrow{AM}, v) - \alpha\beta \det(v, v) = \alpha \det(\overrightarrow{AM}, v),$$

ce qui entraîne que $D(A, v) = D(B, w)$ (pourquoi ?).
Réciproquement, supposons que l'on ait $D(A, v) = D(B, w)$. Alors, $B \in D(A, v)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et v sont colinéaires, c'est-à-dire, comme v n'est pas nul, qu'il existe un réel β tel que $\overrightarrow{AB} = \beta v$. Mais alors, d'après ce qui précède, on a : $D(A, v) = D(B, v)$. Soit C le point tel que $\overrightarrow{BC} = v$, alors $C \in D(A, v)$ donc $C \in D(B, w)$, si bien que $v = \overrightarrow{BC}$ et w sont colinéaires.
(ii) D'abord, la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$ contient A (car $\overrightarrow{AA} = 0\overrightarrow{AB}$) et B (car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB}$).
Réciproquement, soit Δ une droite contenant A et B. Il existe un point C et un vecteur v tels que $\Delta = D(C, v)$. Comme $A \in D(C, v)$, $\overrightarrow{AC}$ et v sont colinéaires donc, par (i), on a : $D(C, v) = D(A, v)$. Comme $B \in D(A, v)$, $\overrightarrow{AB}$ et v sont colinéaires donc, par (i), on a : $D(A, v) = D(A, \overrightarrow{AB})$.

b) Présentation paramétrique d'une droite
Comme on sait, l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul v est l'ensemble des tv, $t \in \mathbb{R}$. Traduisons : pour un point $M = (x, y)$, dire que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à v, c'est dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = tv$, c'est-à-dire : $(x - x_A, y - y_A) = t(\alpha, \beta) = (t\alpha, t\beta)$, ou encore :

$$M = (x, y) \in D(A, v) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A. \end{cases}$$

À présent, soit x_A, y_A, α, β des réels (α ou β non nul). Alors l'ensemble des points (x, y) tels que

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A. \end{cases}$$

est la droite $D(A, v)$, où A est le point (x_A, y_A) et v le vecteur (α, β).
c) Équation cartésienne d'une droite
Soit $A = (x_A, y_A)$ un point et $v = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul. Alors, si $M = (x, y)$ est un point quelconque du plan, on a :

$$\begin{aligned} M \in D(A, v) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } v \text{ colinéaires} \\ &\iff \det(\overrightarrow{AM}, v) = 0 \\ &\iff \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est appelée équation (cartésienne) de $D(A, v)$: c'est une condition nécessaire et suffisante pour que le point $M = (x, y)$ appartienne à $D(A, v)$.

Réciproquement, si (a, b) est un couple de réels qui ne sont pas tous deux nuls et c est un réel quelconque, notons Δ l'ensemble des points $M = (x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$. Alors, Δ est une droite dirigée par $v = (-b, a)$.
En effet, l'équation $ax + by + c = 0$ possède au moins une solution (x_A, y_A) : si $a \neq 0$, on peut prendre $(x_A, y_A) = (-c/a, 0)$; si $b \neq 0$, on peut prendre $(x_A, y_A) = (0, -c/b)$. Mais alors, vu que $ax_A + by_A + c = 0$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} ax + by + c = 0 &\iff ax + by - ax_A - by_A = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(x - x_A) = 0 \\ &\iff \det(\overrightarrow{AM}, v) = 0, \end{aligned}$$

où $A = (x_A, y_A)$ et $v = (-b, a)$. Ainsi, $\Delta = D(A, v)$.

Avec les notations précédentes, si $b \neq 0$, on appelle *pente* de Δ le nombre $p = -a/b$. On voit que l'équation de Δ est équivalente à : $y = px + q$, où $q = -c/b$.
Ce nombre p ne dépend que de la droite. En effet, on peut le calculer à partir des coordonnées d'un vecteur directeur $v = (-b, a)$; si on change de vecteur directeur, on remplace v par $v' = \alpha v$ avec $\alpha \neq 0$, et le nouveau calcul donne une pente $p' = -(\alpha a)/(\alpha b) = -a/b = p$.
Lorsque $b = 0$, on dit que Δ a une pente infinie.

Exercice. Redémontrer le lemme du a) en termes d'équations cartésiennes.

d) Position relative de deux droites
Idée : étudier l'intersection de deux droites, c'est résoudre un système 2×2.

Proposition. *Soit a, b, c, a', b', c' six réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. Alors les droites Δ et Δ' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$...*
– se coupent en un point unique si $ab' - a'b \neq 0$;

– *sont confondues s'il existe un réel non nul λ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ et $c' = \lambda c$ (i.e. les équations sont proportionnelles) ;*
– *sont disjointes s'il existe un réel non nul λ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ et $c' \neq \lambda c$.*

Remarque. Dans le premier cas, on parle de droites *sécantes* ; dans le troisième, de droites *parallèles.*
Introduisons les vecteurs directeurs $v = (-b, a)$ et $v' = (-b', a')$. Comme $ab' - ba' = \det(v', v)$, on voit qu'on est dans le premier cas si v et v' ne sont pas colinéaires et dans l'un des deux suivants si v et v' sont colinéaires.

Démonstration. Soit $M = (x, y)$ un point. Alors M appartient à l'intersection de Δ et Δ' si et seulement si (x, y) est solution du système suivant :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Si $ab' - ba' \neq 0$, l'unique solution est : $x = (bc' - cb')/(ab' - a'b)$, $y = (ac' - ca')/(ab' - a'b)$, d'où la proposition dans le premier cas.
Si $ab' - ba' = 0$, alors v et v' sont colinéaires et, comme $v \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v' = \lambda v$ (et $\lambda \neq 0$ car v' n'est pas nul). Alors l'équation de Δ' s'écrit : $\lambda ax + \lambda by + c' = 0$; elle équivaut à : $ax + by + c'/\lambda = 0$. Ainsi, de deux choses l'une : si $c = c'/\lambda$, les équations coïncident donc

Remarque. Étant donnés un point et une droite, il existe une unique droite passant par ce point et parallèle à la droite : c'est la droite passant par le point donné et dirigée par n'importe quel vecteur directeur de la droite donnée.

Exercice. Considérons trois droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$. Alors ces droites sont parallèles ou concourantes (i.e. elles se coupent en un point) si et seulement si $(ab' - a'b)c'' + (ca' - ac')b'' + (bc' - cb')a'' = 0$.

5° Application affine, application linéaire associée

On rappelle qu'une application affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une application de la forme $x \mapsto ax + b$, où a et b sont indépendants de la variable. On étend aux applications de deux variables.

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On dit que f est affine s'il existe a, b, c, d, α, β réels tels que

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + \alpha \\ cx + dy + \beta \end{pmatrix}.$$

Exemple. Dans un changement de repère, le couple (x, y) est l'image de (x', y') par une fonction affine. Vérifier que l'inverse est vrai aussi.

Exemple. Soit A un point et k un réel. On appelle *homothétie* de centre A et de rapport k l'application qui, à un point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$. C'est une application affine car on a, avec des notations évidentes : $x' = kx + x_A$, $y' = ky + y_A$.

Exemple. Soit $v = (\alpha, \beta)$ un vecteur. On appelle *translation* de vecteur v l'application qui, à un point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = v$. Elle est affine car on a : $x' = x + \alpha$, $y' = y + \beta$.

Exemple. Soit D et Δ deux droites non parallèles. On appelle *projection sur D parallèlement à Δ* l'application qui, à un point M, associe le point d'intersection de D avec la parallèle à Δ passant par M. Montrer qu'elle est affine.

Définition (Notations de la définition précédente)**.** On appelle *application linéaire* associée à f l'application $\overrightarrow{f}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui, à un vecteur $v = (x, y)$, associe le vecteur $v' = (x', y')$ dont les coordonnées sont : $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$.

(Pour que la définition ait un sens, il faudrait s'assurer que les coefficients a, b, c, d, α, β sont uniquement déterminés par f. Glissons.)

Proposition (Notations ci-dessus)**.** *Soit A et B deux points. Alors on a :* $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$.

Comme conséquence, on voit qu'une application affine est parfaitement déterminée par l'application linéaire $\overrightarrow{f}$ et la donnée de l'image A' d'un point A : connaissant A' et $\overrightarrow{f}$, on reconstruit l'image de tout point B par la relation : $\overrightarrow{A'f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$.

Exercice. Montrer que f est bijective si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
On dit que f est *directe* si $ad - bc > 0$ est *indirecte* si $ad - bc < 0$.

6° Affixe

On se rappelle enfin qu'on a étudié les complexes... et qu'on a défini $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à tout point $A = (x_A, y_A)$ (resp. tout vecteur $v = (\alpha, \beta)$), on associe le nombre complexe $z_A = x_A + iy_A$ (resp. $z_v = \alpha + i\beta$), qu'on appelle *affixe* de A (resp. de v).
Ainsi, quand on se donne un couple de réels (x, y), on peut vouloir désigner :
– le point $A = (x, y)$,
– le vecteur $\overrightarrow{OA} = (x, y)$, où $O = (0, 0)$,
– le complexe $x + iy$.
Certaines propriétés sont très simples quand on les « regarde en complexes ». Par exemple, si f est l'homothétie de centre A et de rapport k, l'affixe z' de l'image par f d'un point M, ayant lui-même pour affixe z, est : $z' = k(z - z_A) + z_A$. Etc.
De façon plus générale, étant donné un repère $\mathcal{R} = (O, e_1, e_2)$, l'affixe d'un point M (resp. d'un vecteur v) est le complexe $x + iy$, où (x, y) sont les coordonnées de M dans $\mathcal{R}$ (resp. de v dans (e_1, e_2)).

II Géométrie euclidienne

1° Produit scalaire

a) Vocabulaire

Définition. Soit $v_1 = (x_1, y_1)$ et $v_2 = (x_2, y_2)$ des vecteurs. On définit leur *produit scalaire* par :

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

On vérifie que si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$, alors (Re désigne la partie réelle) :

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \operatorname{Re}\big(x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2\big) = \operatorname{Re} z_1\overline{z_2}.$$

(On ajoute en passant que $\operatorname{Im} z_1\overline{z_2}$ est le déterminant de (v_1, v_2).)

b) Propriétés formelles

Proposition. *Le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive, ce qui signifie que pour tous vecteurs v_1, v_2, w et tous scalaires λ_1 et λ_2, on a :*

(i) $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$,

(ii) $\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle w, v_2 \rangle$,

(iii) $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$,

(iv) $\langle v_1, v_1 \rangle \geq 0$ *et, si* $\langle v_1, v_1 \rangle = 0$, *alors* $v_1 = \overrightarrow{0}$.

La démonstrations est une vérification lourde mais facile.

c) Distance, norme, module

Définition. Soit v un vecteur. On définit sa *norme* comme le réel positif $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
Soit A et B deux points. On définit leur *distance* comme : $AB = ||\overrightarrow{AB}||$.

On remarque que si z est l'affixe de v, on a : $||v|| = |z|$.
Et si z_A et z_B sont les affixes de A et B, on a : $AB = |z_B - z_A|$.

d) Orthogonalité et théorème de Pythagore

Définition. Deux vecteurs v et v' sont dits *orthogonaux* si $\langle v, v'\rangle = 0$.
On dit que deux droites sont *perpendiculaires* ou *orthogonales* si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. (Préciser pourquoi cela ne dépend pas du choix d'un vecteur directeur. Définir la notion de triangle rectangle.)

Remarque. Soit $v = (a, b)$ un vecteur non nul. Si $u = (x, y)$ est un autre vecteur, l'égalité $\langle v, u\rangle = 0$ s'écrit : $ax + by = 0$, ce qu'on peut interpréter comme $\det(v', u) = 0$ où $v' = (-b, a)$. Ainsi, les vecteurs orthogonaux à v sont les vecteurs colinéaires à v' ; il en résulte qu'étant donné une droite et un point, il existe une unique perpendiculaire à la droite passant par le point. Cela permet de définir la projection orthogonale sur une droite.

Proposition (Théorème de Pythagore)**.** *Soit ABC un triangle. Alors, ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.*

Démonstration. On calcule, à l'aide des propriétés formelles du produit scalaire :

$$\begin{aligned} BC^2 &= ||\overrightarrow{BC}||^2 = \langle \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\rangle = \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}\rangle + 2\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\rangle \\ &= AB^2 + AC^2 + 2\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\rangle. \end{aligned}$$

On a donc l'équivalence : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ si et seulement si $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\rangle = 0$.

e) Deux inégalités

Proposition (Cauchy-Schwarz)**.** *Soit v et v' deux vecteurs. Alors : $|\langle v, v'\rangle| \leq ||v|| \cdot ||v'||$. De plus, en cas d'égalité, v et v' sont colinéaires.*

Démonstration. Soit z (resp. z') l'affixe de v (resp. v'). On écrit :

$$|\langle v, v'\rangle| = |\operatorname{Re} z\overline{z'}| \leq |z\overline{z'}| = |z| \cdot |\overline{z'}| = |z| \cdot |z'| = ||v|| \cdot ||v'||.$$

En cas d'égalité, on a : $|\operatorname{Re} z\overline{z'}| = |z\overline{z'}|$, donc $\operatorname{Im} z\overline{z'} = 0$, ce qui revient à dire : $\det(v, v') = 0$ par une remarque ci-dessus.

L'inégalité triangulaire peut s'énoncer de deux façons.

Proposition. *Soit v et v' deux vecteurs, on a : $\Big| ||v|| - ||v'|| \Big| \leq ||v - v'|| \leq ||v|| + ||v'||$.*
Soit A, B, C trois points, on a : $|AB - AC| \leq BC \leq AB + AC$.

Démonstration. La première inégalité se traduit en complexes par : $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$, qu'on a déjà vue. La deuxième en résulte avec $v = \overrightarrow{AB}$ et $v' = \overrightarrow{AC}$.

2° Bases orthonormées

Définition. On dit qu'un couple de vecteurs (e_1, e_2) est une *base orthonormée* si $||e_1|| = 1$, $||e_2|| = 1$ et $\langle e_1, e_2\rangle = 0$.

Exemple. On peut prendre $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.

Exercice. Vérifier qu'une base orthonormée est bien une base...

L'intérêt de la notion, c'est que son expression en coordonnées est la même dans *toute base orthonormée.* C'est ce qu'exprime la proposition suivante.

Proposition (Invariance du produit scalaire)**.** *Soit* (e'_1, e'_2) *une base orthonormée. Soit deux vecteurs* $v_1 = (x_1, y_1)$ *et* $v_2 = (x_2, y_2)$*, notons* (x'_1, y'_1) *et* (x'_2, y'_2) *leurs coordonnées dans la base* (e'_1, e'_2)*. On a :*

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \langle v_1, v_2\rangle = x'_1x'_2 + y'_1y'_2.$$

Démonstration. On a, par définition des coordonnées : $v_1 = x'_1e'_1 + y'_1e'_2$, de même pour v_2. On calcule grâce aux propriétés formelles du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_2\rangle &= \langle x'_1e'_1 + y'_2e'_2, x'_2e'_1 + y'_2e'_2\rangle \\
&= x'_1x'_2\langle e'_1, e'_2\rangle + (x'_1y'_2 + y'_1x'_2)\langle e'_1, e'_2\rangle + y'_1y'_2\langle e'_2, e'_2\rangle \\
&= x'_1x'_2 + y'_1y'_2.
\end{aligned}$$

Décrivons à présent les bases orthonormées.

Proposition. *Soit* (e_1, e_2) *et* (e'_1, e'_2) *deux bases orthonormées. Alors il existe* $\theta \in \mathbb{R}$*, unique à* 2π *près, et* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$*, unique, tels que*

$$e'_1 = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta e_2, \quad e'_2 = -\varepsilon\sin\theta e_2 + \varepsilon\cos\theta e_2.$$

En d'autres termes, la matrice de passage est : $P = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta\end{pmatrix}$.

Démonstration. Soient les réels tels que $e'_1 = ae_1 + ce_2$, $e'_2 = be_1 + de_2$. On a :

$$1 = ||e'_1||^2 = \langle ae_1 + ce_2, ae_1 + ce_2\rangle = a^2\langle e_1, e_1\rangle + 2ac\langle e_1, e_2\rangle + c^2\langle e_2, e_2\rangle = a^2 + c^2.$$

Comme on l'a déjà vu, il existe donc θ réel, unique à 2π près, tel que $a = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$. On vérifie de même que $b^2+d^2 = 1$, si bien qu'on trouve θ' tel que $b = \cos\theta'$ et $d = \sin\theta'$. La relation $\langle e'_1, e'_2\rangle = 0$ donne : $ab+cd = 0$, ou encore : $\cos(\theta-\theta') = 0$. Mais alors, il vient : $\theta-\theta' = \pi/2+k\pi$ pour k entier convenable, d'où $\theta' = \theta - \pi/2 - k\pi$ et $b = (-1)^k \sin\theta$ et $d = -(-1)^k\cos\theta$. En prenant $\varepsilon = (-1)^{k+1}$, on en déduit l'existence annoncée. L'unicité de θ à 2π près est évidente, celle de ε en résulte.

Remarque. On vérifie que deux vecteurs dont les coordonnées sont données par les formules de la proposition forment une base orthonormée.
On peut utiliser ce fait pour en construire. Soit $v = (a, b)$ un vecteur non nul. On choisit θ un argument de l'affixe de v, de sorte que $e'_1 = v/||v|| = (\cos\theta, \sin\theta)$; on pose $e'_2 = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Alors, (e'_1, e'_2) est une base orthonormée.

3° Isométries et similitudes

a) Définition et caractérisation

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application et $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est une *isométrie* (resp. une *similitude* de rapport k) si, pour tous points A et B, on a : $f(A)f(B) = AB$ (resp. $f(A)f(B) = k \cdot AB$). [Ici, $f(A)f(B)$ est la distance entre $f(A)$ et $f(B)$.]
(Une isométrie est donc une similitude de rapport 1.)

Proposition. *Soit* f *une similitude de rapport* k*. Alors* f *est affine et il existe* $\theta \in \mathbb{R}$*, unique à* 2π *près, et* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$*,* α *et* β *réels, uniques, tels que*

$$\forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k\cos\theta\, x - \varepsilon k\sin\theta\, y + \alpha \\ k\sin\theta\, x + \varepsilon k\cos\theta\, y + \beta\end{pmatrix}.$$

Remarque. Si $k \neq 0$, f est bijective (vérifier) ; elle est directe si $\varepsilon = 1$, indirecte si $\varepsilon = -1$. On appelle k le rapport de f et, si $\varepsilon = 1$, θ son angle.
L'application linéaire associée à f est appelée une *isométrie linéaire* : elle a la même expression en coordonnées, en remplaçant α et β par 0.

Démonstration. Le caractère affine est admis jusqu'à nouvel ordre (les personnes intéressées peuvent me contacter). Soit $h : (x, y) \mapsto (kx, ky)$ l'homothétie de centre $(0, 0)$ et de rapport k : son inverse h^{-1} est l'homothétie de même centre et de rapport $1/k$. On vérifie que f est une similitude si et seulement si $g = h^{-1} \circ f$ est une isométrie. Soit $\overrightarrow{g}$ l'application linéaire associée à g. En utilisant la relation $\langle e_1, e_2\rangle = (||e_1 + e_2||^2 - ||e_1 + e_2||^2)/4$ et la préservation de la norme par $\overrightarrow{g}$, on montre que l'image par $\overrightarrow{g}$ de la base canonique (e_1, e_2) est une base orthonormée. On la décrit grâce à la proposition ci-dessus, on en déduit les coordonnées de l'image d'un point $M = (x, y)$ grâce à : $\overrightarrow{g(O)g(M)} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OM})$, puis on applique h pour obtenir l'expression annoncée. L'unicité est laissée en exercice.

b) Écriture en complexes

Soit $A = ke^{i\theta} = k\cos\theta + i\sin\theta$ et $B = \alpha + i\beta$. L'affixe z' de l'image de (x, y) est donc :

$$z' = k\cos\theta\, x - \varepsilon k\sin\theta\, y + i(k\sin\theta\, x + \varepsilon k\cos\theta\, y) + \alpha + i\beta = ke^{i\theta}(z + i\varepsilon y) + w.$$

On en tire : si $\varepsilon = 1$, on a : $z' = Az + B$; sinon : $z' = A\overline{z} + B$.
Ainsi, les similitudes directes sont, en quelque sorte, les applications affines complexes.

Exemple (Rotations)**.** Les isométries directes sont donc les applications du plan qui, en complexes, sont de la forme $z \mapsto e^{i\theta}z + B$. Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, on reconnaît une translation dont le vecteur a pour affixe B. Sinon, on vérifie sans peine qu'il y a un seul point fixe, qui a pour affixe la solution de $\omega = e^{i\theta}\omega + B$. On dit alors que la transformation est la *rotation* de centre (le point d'affixe) ω et d'angle θ.
L'application linéaire associée est l'application qui, au vecteur v d'affixe z, associe le vecteur v' d'affixe $e^{i\theta}z'$. On parle de *rotation vectorielle* (ici, θ est quelconque).

Exercice. Montrer qu'un changement de repère orthonormé direct se traduit par une formule de changement de repère de la forme

$$z' = e^{i\theta}z + \omega'.$$

Ici, (O, e_1, e_2) et (O', e_1', e_2') sont deux repères orthonormés, (x, y) et (x', y') sont les coordonnées d'un point dans les deux repères, $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, et θ et ω' sont indépendants du point. (On peut vérifier que θ est une mesure de l'angle $(\widehat{e_1, e_1'})$ et que ω' est l'affixe du point O' dans le repère (O, e_1, e_2).) [Comparer l'écriture en complexe d'une rotation, la formule de changement de base et la description des bases orthonormées directes.]

4° Angles et arguments

a) Construction (rapide) de la notion

L'idée qui sous-tend la définition des angles est que l'on peut *superposer* un couple de demi-droites sur un autre couple par le moyen d'une rotation.

Définition. Soit (u_1, u_2) et (u_1', u_2') deux couples de vecteurs non nuls. On dit qu'ils définissent le même angle et on note $(\widehat{u_1, u_2}) = (\widehat{u_1', u_2'})$ s'il existe une rotation vectorielle qui envoie $u_1/||u_1||$ sur $u_1'/||u_1'||$ et $u_2/||u_2||$ sur $u_2'/||u_2'||$.

Exercice (Invariance des angles par isométrie/similitude directe)**.** Vérifier que si A, B, C, D sont quatre points, si f est une isométrie directe (resp. une similitude directe de rapport k), si $A' = f(A)$, etc., alors les angles $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}})$ sont égaux. [L'application linéaire associée à f (resp. composée avec l'homothétie de rapport $1/k$) envoie $\overrightarrow{AB}/AB$ sur $\overrightarrow{A'B'}/A'B'$ et $\overrightarrow{CD}/CD$ sur $\overrightarrow{C'D'}/C'D'$.]

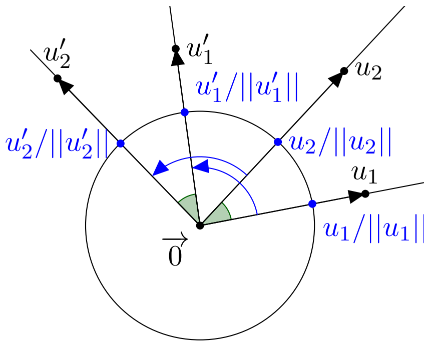


FIGURE 1 – Égalité des angles (« verts ») : la rotation est symbolisée par les flèches bleues

Il est plus commode de voir les choses en complexes : si u_k (resp. u'_k) a pour affixe z_k (resp. z'_k) pour $k = 1$ ou 2, on a $(\widehat{u_1, u_2}) = (\widehat{u'_1, u'_2})$ si et seulement s'il existe θ réel tel que

$$\frac{z_1}{|z_1|} = e^{i\theta}\frac{z'_1}{|z'_1|} \text{ et } \frac{z_2}{|z_2|} = e^{i\theta}\frac{z'_2}{|z'_2|}.$$

Mais ces relations signifient exactement que $\theta \equiv \arg(z_k/z'_k)$ $[2\pi]$ (pour $k = 1$ ou 2). L'existence d'un θ qui marche pour les deux signifie donc que l'on a : $\arg(z_1/z'_1) \equiv \arg(z_2/z'_2)$ $[2\pi]$, ou encore, vu la relation entre arguments d'un produit/quotient et somme/différence des arguments : $\arg(z_2/z_1) \equiv \arg(z'_2/z'_1)$ $[2\pi]$. On a démontré :

$$(\widehat{u_1, u_2}) = (\widehat{u'_1, u'_2}) \iff \arg\frac{z_2}{z_1} \equiv \arg\frac{z'_2}{z'_1}\ [2\pi].$$

Définition. On appelle *mesure* de l'angle $(\widehat{u_1, u_2})$ tout argument de $\frac{z_2}{z_1}$ (bien défini à 2π près).

On peut alors dire que *deux angles sont égaux si et seulement s'ils ont la même mesure.* On peut se permettre d'identifier un angle et sa mesure.

Exemple. Étant donné quatre points distincts A, B, C, D d'affixes z_A, etc., une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$ est un argument de $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$.

Exercice. Démontrer la relation de Chasles (sur les mesures) : $(\widehat{u, w}) = (\widehat{u, v}) + (\widehat{v, w})$ $[2\pi]$ pour tous vecteurs non nuls u, v, w. [Comparer l'argument d'un produit et la somme des arguments.] Démontrer qu'une similitude directe $z \mapsto \alpha z + \beta$ ($\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$) préserve les angles, qu'une isométrie indirecte $z \mapsto \alpha\bar{z} + \beta$ transforme un angle en son opposé. [Dans l'expression de l'angle comme un argument, les β et les α se simplifient.]

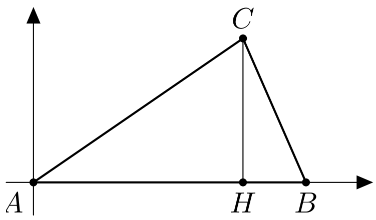
b) Rapport de projection

Proposition. *Soit ABC un triangle quelconque non aplati, soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et θ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$. Alors*[1] *:*

$$\langle\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\rangle = \overline{AH} \cdot \overline{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos\theta.$$

DÉMONSTRATION. Soit[2] $e_1 = \overrightarrow{AB}/AB$ et e_2 un vecteur tel que (e_1, e_2) est une base orthonormée directe. Par définition, θ est un argument de l'affixe de $\overrightarrow{AC}$ dans la base (e_1, e_2), c'est-à-dire qu'on

1. Ici, $\overline{AH}$ est l'abscisse de H dans un repère normé (A, e_1) de la droite (AB), c'est-à-dire que e_1 est un vecteur directeur de norme 1 de cette droite ($\pm\overrightarrow{AB}/AB$) et que l'on a : $\overrightarrow{AH} = \overline{AH}e_1$.
2. On obtiendrait les mêmes conclusions en prenant $-e_1$ à la place.



a : $\overrightarrow{AC} = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$. Si H' est le point tel que $\overrightarrow{AH'} = \cos\theta e_1$, alors $\overrightarrow{H'C}$ est orthogonal à e_1 et donc $H' = H$. D'autre part :

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \langle AB \cdot e_1, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \rangle = AB \cdot AC \cdot \cos\theta.$$

c) Une application : trigonométrie dans un triangle rectangle

Proposition. *Soit ABC un triangle rectangle en B et θ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$:*

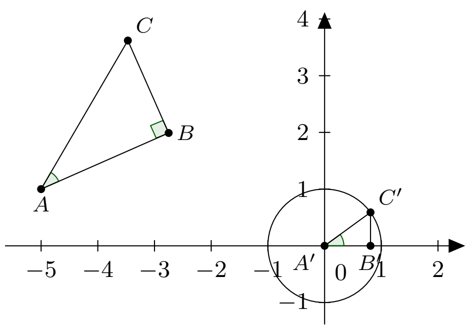
$$\cos\theta = \frac{AB}{AC}, \quad |\sin\theta| = \frac{BC}{AC}.$$

Première version. Pour le cosinus, on applique le paragraphe précédent dans le cas où $H = B$. Pour finir, on calcule avec le théorème de Pythagore :

$$|\sin\theta| = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{BC^2 - AB^2}{BC^2}} = \sqrt{\frac{AC^2}{BC^2}}.$$

Deuxième version. Pour changer un peu, on utilise les complexes. On note a, b et c les affixes de A, B et C. Considérons l'application

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \ z \longmapsto \left|\frac{b-a}{c-a}\right| \frac{z-a}{b-a}.$$



Vue en géométrie, c'est une similitude directe, donc elle préserve les angles, dont l'angle θ qui nous intéresse. Soit $a' = f(a) = 0$, $b' = f(b) \in \mathbb{R}^+$ et $c' = f(c)$, et $A' = O$, B' et C' les points correspondants. On a : $a' \in \mathbb{R}^+$ et $|c'| = 1$. Par préservation de l'angle droit en B, on sait que $A'B'C'$ est rectangle en B', si bien que B' est la projection de C' sur l'axe réel. En d'autres termes, b' est la partie réelle de c' et $\cos\theta = b' = |b-a|/|c-a| = AB/AC$.

d) Une application : le théorème de l'angle inscrit

L'énoncer, le démontrer...

e) Une application : critère de cocyclicité

Proposition. *Soit A, B, C, D quatre points distincts d'affixes a, b, c, d. Alors, ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport $[a,b,c,d]$ est réel, où*

$$[a,b,c,d] = \frac{c-a}{d-a} \cdot \frac{d-b}{c-b}.$$

Exercice. Le démontrer.