Université Claude Bernard–Lyon I
L1 de Mathématiques : Algèbre I
Année 2012–2013

Géométrie plane: résumé

I Géométrie affine

1° Points et vecteurs

Vecteur défini par deux points. Critère d'égalité de deux vecteurs, parallélogramme, milieu. Opérations sur les vecteurs : somme (lien avec le parallélogramme), produit d'un scalaire par un vecteur (lien avec Thalès).

2° Colinéarité et déterminant

Critère de colinéarité. Déterminant : définition, propriétés formelles, interprétation comme « aire algébrique ».

3° Bases et repères

Définition d'une base, coordonnées d'un vecteur, critère pour qu'un couple de vecteur soit une base. Repère, coordonnées d'un point. Changement de repère.

4° Droites

a) Deux façons de construire une droite

Définition. Soit A un point de $\mathbb{R}^2$ et v un vecteur non nul. On appelle droite passant par A et dirigée par v et on note $D(A, v)$ l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et v sont colinéaires.

Remarque. Par le critère de colinéarité, un point M appartient à $D(A, v)$ si et seulement si on a : $\det(\overrightarrow{AM}, v) = 0$.

Lemme. (i) *Soit A et B deux points et v et w deux vecteurs non nuls. Alors $D(A, v) = D(B, w)$ si et seulement si [les vecteurs v et w sont colinéaires et $\overrightarrow{AB}$ est un multiple de v (ou w)].*
En particulier, les vecteurs directeurs de $D(A, v)$ sont les multiples non nuls de v : si w est un vecteur tel que $D(A, w) = D(A, v)$, alors w de la forme $w = \alpha v$, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ convenable.
(ii) *Supposons A et B distincts. L'unique droite qui contient A et B est la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$. (c'est aussi la droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{BA}$)*

Démonstration. (i) Supposons qu'existent des réels α et β tels que $w = \alpha v$ ($\alpha \neq 0$) et $\overrightarrow{AB} = \beta v$. Alors, pour M quelconque dans le plan, on a :

$$\det(\overrightarrow{BM}, w) = \det(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}, w) = \det(\overrightarrow{AM} - \beta v, \alpha v) = \alpha \det(\overrightarrow{AM}, v) - \alpha\beta \det(v, v) = \alpha \det(\overrightarrow{AM}, v),$$

ce qui entraîne que $D(A, v) = D(B, w)$.
Supposons que l'on ait $D(A, v) = D(B, w)$. Alors, $B \in D(A, v)$ donc $\overrightarrow{AB}$ et v sont colinéaires, c'est-à-dire, comme v n'est pas nul, qu'il existe un réel β tel que $\overrightarrow{AB} = \beta v$. Mais alors, d'après ce qui précède, on a : $D(A, v) = D(B, v)$. Soit C le point tel que $\overrightarrow{BC} = v$, alors $C \in D(A, v)$ donc $C \in D(B, w)$, si bien que $v = \overrightarrow{BC}$ et w sont colinéaires.

(ii) D'abord, la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$ contient A (car $\overrightarrow{AA} = 0\overrightarrow{AB}$) et B (car $\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB}$).
Réciproquement, soit Δ une droite contenant A et B. Il existe un point C et un vecteur v tels que $\Delta = D(C, v)$. Comme $A \in D(C, v)$, $\overrightarrow{AC}$ et v sont colinéaires donc, par (i), on a : $D(C, v) = D(A, v)$. Comme $B \in D(A, v)$, $\overrightarrow{AB}$ et v sont colinéaires donc, par (i), on a : $D(A, v) = D(A, \overrightarrow{AB})$. C'est terminé.

b) Présentation paramétrique d'une droite

Comme on sait, l'ensemble des vecteurs colinéaires à un vecteur non nul v est l'ensemble des tv, $t \in \mathbb{R}$. Traduisons : pour un point $M = (x, y)$, dire que $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à v, c'est dire qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = tv$, c'est-à-dire : $(x - x_A, y - y_A) = t(\alpha, \beta) = (t\alpha, t\beta)$, ou encore :

$$M = (x, y) \in D(A, v) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A. \end{cases}$$

Inversement, soit x_A, y_A, α, β des réels, soit A le point (x_A, y_A) et v le vecteur (α, β). Alors l'ensemble des point $M = (x, y)$ tels que

$$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A. \end{cases}$$

est la droite $D(A, v)$.

c) Équation cartésienne d'une droite

Soit $A = (x_A, y_A)$ un point et $v = (\alpha, \beta)$ un vecteur non nul. Alors, si $M = (x, y)$ est un point quelconque du plan, on a :

$$\begin{aligned} M \in D(A, v) &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } v \text{ colinéaires} \\ &\iff \det(\overrightarrow{AM}, v) = 0 \\ &\iff \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est appelée équation (cartésienne) de $D(A, v)$: c'est une condition nécessaire et suffisante pour que le point $M = (x, y)$ appartienne à $D(A, v)$.

Réciproquement, si (a, b) est un couple de réels qui ne sont pas tous deux nuls et c est un réel quelconque, notons Δ l'ensemble des points $M = (x, y)$ tels que $ax + by + c = 0$. Alors, Δ est une droite dirigée par $v = (-b, a)$.
En effet, l'équation $ax + by + c = 0$ possède au moins une solution (x_A, y_A) : si $a \neq 0$, on peut prendre $(x_A, y_A) = (-c/a, 0)$; si $b \neq 0$, on peut prendre $(x_A, y_A) = (0, -c/b)$. Mais alors, vu que $ax_A + by_A + c = 0$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} ax + by + c = 0 &\iff ax + by - ax_A - by_A = 0 \\ &\iff a(x - x_A) + b(x - x_A) = 0 \\ &\iff \det(\overrightarrow{AM}, v) = 0, \end{aligned}$$

où $A = (x_A, y_A)$ et $v = (-b, a)$. Ainsi, $\Delta = D(A, v)$.

Avec les notations précédentes, si $b \neq 0$, on appelle *pente* de Δ le nombre $p = -a/b$. On voit que l'équation de Δ est équivalente à : $y = px + q$, où $q = -c/b$.
Ce nombre p ne dépend que de la droite. En effet, on peut le calculer à partir des coordonnées d'un vecteur directeur $v = (-b, a)$; si on change de vecteur directeur, on remplace v par $v' = \alpha v$ avec $\alpha \neq 0$, et le nouveau calcul donne une pente $p' = -(\alpha a)/(\alpha b) = -a/b = p$.
Lorsque $b = 0$, on dit que Δ a une pente infinie.

Exercice. Redémontrer le lemme du a) grâce à l'équation cartésienne.

d) Position relative de deux droites

Idée : étudier l'intersection de deux droites, c'est résoudre un système 2×2.

Proposition. *Soit a, b, c, a', b', c' six réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. Alors les droites Δ et Δ' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$...*
- *se coupent en un point unique si $ab' - a'b \neq 0$;*
- *sont confondues s'il existe un réel non nul λ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ et $c' = \lambda c$ (i.e. les équations sont proportionnelles) ;*
- *sont disjointes s'il existe un réel non nul λ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ et $c' \neq \lambda c$.*

Remarque. Dans le premier cas, on parle de droites *sécantes* ; dans le troisième, de droites *parallèles.*
Introduisons les vecteurs directeurs $v = (-b, a)$ et $v' = (-b', a')$. Comme $ab' - ba' = \det(v', v)$, on voit qu'on est dans le premier cas si v et v' ne sont pas colinéaires et dans l'un des deux suivants si v et v' sont colinéaires.

Démonstration. Soit $M = (x, y)$ un point. Alors M appartient à l'intersection de Δ et Δ' si et seulement si (x, y) est solution du système suivant :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0. \end{cases}$$

Si $ab' - ba' \neq 0$, l'unique solution est : $x = (bc' - cb')/(ab' - a'b)$, $y = (ac' - ca')/(ab' - a'b)$, d'où la proposition dans le premier cas.
Si $ab' - ba' = 0$, alors v et v' sont colinéaires et, comme $v \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v' = \lambda v$ (et $\lambda \neq 0$ car v' n'est pas nul). Alors l'équation de Δ' s'écrit : $\lambda ax + \lambda by + c' = 0$; elle équivaut à : $ax + by + c'/\lambda = 0$. Ainsi, de deux choses l'une : si $c = c'/\lambda$, les équations coïncident donc

Remarque. Étant donnés un point et une droite, il existe une unique droite passant par ce point et parallèle à la droite : c'est la droite passant par le point donné et dirigée par n'importe quel vecteur directeur de la droite donnée.

Exercice. Considérons trois droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$. Alors ces droites sont parallèles ou concourantes (i.e. elles se coupent en un point) si et seulement si $(ab' - a'b)c'' + (ca' - ac')b'' + (bc' - cb')a'' = 0$.