Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2011-2012

Math I ALGEBRE - PMI,EPI

Feuille d'exercices n° 7

Bases, Matrices, Vecteurs...

Exercice 1. (Procédé de Gram-Schmidt)

On muni $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

1. On pose $e_1 = (1, 0, -1)$; $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.
   (a) Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ mais non orthogonale et non normée.
   (b) Orthonormaliser cette base.
   (c) Quelles sont les coordonnées de $u = (2, -3, 4)$ dans la base orthonormalisée ?
2. On pose $f_1 = (3, 4, 0), f_2 = (1, 0, 0)$ et $f_3 = (0, 5, 5)$.
   (a) Vérifier que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ mais non orthogonale et non normée.
   (b) Orthonormaliser cette base.
   (c) Quelles sont les coordonnées de $u = (2, -3, 4)$ dans la base orthonormalisée ?

Exercice 2. Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminez le vecteur v qui est image de u.
2. Déterminez le vecteur w qui a pour image u.

Exercice 3. Déterminez les matrices des applications linéaires suivantes :

1. $h_1(x, y) = (2x - y, x)$,
2. $h_2(x, y) = (x - y, 0)$
3. $h_3(x, y) = (x, y, x - y)$
4. $h_4(x, y) = (x - y, y - x)$
5. $h_5(x, y) = (0, y, x + 2y)$
6. $h_6(x, y, z) = (x + 2y, z - 2y)$
7. $h_7(x, y, z) = (z, y, x)$

Exercice 4. Soit l'application linéaire $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $h(2, 1) = (2, -3)$ et $h(1, -1) = (3, -1)$. Déterminez la matrice de h.

Exercice 5. On considère des vecteurs $\overrightarrow{U} = x\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{V} = y\overrightarrow{j}$ dans le repère orthonormé $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. En coordonnées on peut les écrire

$$\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

1. On fait tourner ces vecteurs autour de $(0,0)$ de l'angle θ. Quelles sont les coordonnées des deux nouveaux vecteurs ?
2. On fait tourner le vecteur $\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ autour de $(0,0)$ de l'angle θ. Quelles sont les coordonnées du nouveau vecteur ?
3. Déterminer la matrice de la transformation du plan correspondant à l'opération qui tourne chaque vecteur de l'angle θ autour de l'origine. Cette matrice, notons-la A, donne la réponse à la question précédente : le vecteur tourné a pour coordonnées $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
4. Déterminer la matrice B de la transformation du plan qui multiplie la première coordonnée de chaque vecteur ("x") par 3 et laisse l'autre ("y") inchangée ?
5. Trouver la matrice qui correspond au resultat des deux opérations consécutives sur le plan : d'abord la multiplication de x par 3, puis la rotation d'angle $\theta = \pi/6$ autour de l'origine.
6. Est-ce qu'on obtient la même matrice si on change l'ordre des opérations dans la question précédente ?

Exercice 6. Donnez, pour chaque application linéaire H du plan $\mathbb{R}^2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, la matrice de H.

1. Symétrie d'axe Ox.
2. Symétrie d'axe Oy.
3. Symétrie d'axe $y = x$.
4. Symétrie d'axe $y = -x$.
5. Projection orthogonale sur Ox.
6. Projection orthogonale sur Oy.
7. Homothétie de centre O et de rapport 2.
8. Rotation de centre O et d'angle $-90°$.
9. Rotation de centre O et d'angle $+180°$.
10. Rotation de centre O et d'angle $+30°$.
11. Rotation de centre O et d'angle θ.
12. Cisaillement : $(x, y) \mapsto (x + ky, y)$.

Lesquelles parmis ces applications sont des similitudes ? Des isométries ?
Rappel : une similitude est une transformation qui multiplie toutes les distances par une constante fixe, appelée son rapport. Les similitudes de rapport 1 sont des isométries. Par exemple, les rotations, les translations et les symétries sont des similitudes de rapport 1.

Exercice 7.

1. On considère des points du cercle $x^2 + y^2 = 4$. Calculer la longueur de l'arc du cercle allant du point $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ au point $(\sqrt{3}, 1)$.
2. Soit $x^2+y^2 = r^2$ l'équation du cercle de rayon r. Soient A et B deux points du cercle de coordonnées $(r\cos t_1, r\sin t_1)$ et $(r\cos t_2, r\sin t_2)$ respectivement. Quelle est la formule pour la longueur de l'arc du cercle entre A et B ?

Exercice 8. Grand cercle

L'*orthodromie* désigne le chemin le plus court entre deux points d'une sphère, c'est-à-dire l'arc de grand cercle qui passe par ces deux points.

Sur le site http ://www.bibmath.net/ au rubrique "Grand cercle et distance terrestre" on trouve une application qui permet de déterminer la distance entre deux points A et B sur la terre. Les coordonnées à rentrer sont celles que l'on trouve habituellement dans les tables, exprimées en degrés (puis minutes) de latitude sud ou nord, et de longitude est ou ouest. On connaît le rayon de la Terre (approximé à 6378 km) et on connait les coordonnées des points A et B. Par exemple, on peut prendre pour A - Lyon 45° 45´ N 004° 50´ E et pour B - Boston 42°21´N 071°03´W.

Trouver la formule algébrique que l'application doit utiliser pour le calcul (en prenant soin de bien convertir les angles en radians !)

Rappel. Le passage des coordonnées sphéques (ρ, ϕ, θ) aux cooordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\begin{cases} x = & \rho\cos\theta\cos\phi \\ y = & \rho\sin\theta\cos\phi \\ z = & \rho\sin\phi \end{cases}$$

Par convention, ϕ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ radians et θ entre 0 et 2π radians. On a aussi $\rho \geq 0$.

Exercice 9. Angles sphériques

On sait que l'aire d'une sphère de rayon R est égale à $4\pi R^2$.

1. Le Canada est borné à l'Ouest par le méridien de longitude 140 degrés et à l'est par le méridien de longitude 50 degrés. Ces deux axes se rejoignent au Pôle nord en formant entre eux un angle de 90 degrés (140 degrés - 50 degrés). Au sud, le 40e parallèle relie ces lignes de longitude en enfermant ainsi le Canada dans un grand triangle. Mais, chacune des lignes de longitude croise le 40e parallèle en formant avec lui un angle de près de 90 degrés. Le Canada est donc inséré dans un triangle dont la somme des angles intérieurs est de 270 degrés (3 x 90 degrés) !

   Calculer l'aire d'une lamelle bornée par les deux méridianes donnés. On peut approximer le rayon de la Terre à 6400km.
2. Entre deux points sur une sphère quel est le chemin le plus court ?
3. Soit A, B, C trois points sur la Terre. On considère un triangle sur la Terre avec des sommets A, B, C et les cotés a, b, c - les arcs des grands cercles correspondants. Remarquer que la shpère est entierement couvert par les trois paires de lamelles coupées par des grandes cercles correspondants. Quel est la partie qui est couvert plus qu'une fois ?
4. Trouver une formule générale pour l'aire d'un triangle sur une shpère de rayon R, si les angles de ce triangle sont égales α, β et γ et $\alpha \leq \pi, \beta \leq \pi, \gamma \leq \pi$.
5. Pourquoi la somme des angles d'un triangle sur une sphere est superieure à 180° ?