
Feuille d'exercices n° 5
GÉOMÉTRIE

1 Droites dans le plan

Exercice 1. Points sur le plan

1. Montrer que un quadrilatère de sommets de coordonnées $(4, 2), (-2, -1), (0, -4), (6, -1)$ est un parallélogramme.
2. Trois des quatre sommets d'un parallélogramme ont pour coordonnées $(1, 2), (4, 1), (0, 0)$. Trouver les coordonnées du quatrième sommet.
3. Déterminer si les points suivants appartiennent à la même droite : (a) $(2, 4), (-1, 0), (5, 8)$;
(b) $(2, 4), (3, 5), (5, 7), (0, 2)$; (c) $(-1, 2), (0, -1), (2, 4)$; (d) $(1, -1), (2, -1), (0, 0), (-4, 3)$

Exercice 2. L'aire du triangle

1. Soit $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3)$ des sommets d'un triangle. Démontrer que l'aire du triangle $P_1P_2P_3$ est égale à
$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} |(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)|.$$
2. Soit $A = (2, 4)$ et $B = (-1, 3)$. Soit $P = (x, y)$ un point tel que l'aire du triangle ABP est égale à 6. Trouver l'équation qui lie x et y .

Exercice 3. Droites

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit f la fonction affine définie pour tout nombre x par $f(x) = 6x - 1$. Lesquels parmi les points $(-1; -7), (-\frac{1}{2}; -5), (0; 0)$ appartiennent à la droite définie par cette fonction ?
2. Trouver la pente de la droite qui passe par $A(3, 8)$ et $B(-4, 8)$ et écrire son équation.
3. Écrire l'équation de la droite passant par deux points $(2, 3)$ et $(-5, -1)$.
4. Écrire l'équation de la droite passant par le point $(2, -5)$ et colinéaire au vecteur $(3, 2)$
5. Soit A le point de coordonnées $(2, 4)$ et \vec{u} le vecteur de coordonnées $(3, -1)$. Écrire l'équation cartésienne et l'équation paramétrique d'une droite de vecteur directeur \vec{u} et passant par le point A .

Exercice 4. Deux droites

Soient D_1 et D_2 deux droites dans le plan, données par leurs équations implicites ou paramétriques. Déterminer si les droites sont sécantes, parallèles ou confondues. Dans le cas où elles sont sécantes, donner les coordonnées de leur point d'intersection.

1. $D_1 : 3x + 5y - 2 = 0$; $D_2 : x - 2y + 3 = 0$.
2. $D_1 : 2x - 4y + 1 = 0$; $D_2 : -5x + 10y + 3 = 0$.
3. $D_1 : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - t \end{cases}$; $D_2 : \begin{cases} x = 5 - s \\ y = 2 + 3s \end{cases}$
4. $D_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$; $D_2 : \begin{cases} x = 3 - 4s \\ y = -1 + 6s \end{cases}$
5. $D_1 : x - 2y + 3 = 0$; $D_2 : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 3 - 2s \end{cases}$
6. $D_1 : 3x - 2y + 1 = 0$; $D_2 : \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = 2 - 6s \end{cases}$

Exercice 5. Trois droites

Soient $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$ des équations de trois droites. A quelle condition sur les coefficients ces trois droites sont parallèles ? sont concourantes ?

Mêmes questions pour les droites écrits dans une forme paramétrique.

Exercice 6. Médiannes

Soit ABC le triangle de sommets $A(0;4)$, $B(-3;-1)$ et $C(4;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées de I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.
2. Déterminer une équation de la médiane du triangle ABC issue de A .
3. Déterminer une équation de la médiane du triangle ABC issue de B .
4. Montrer que (AI) et (BK) sont sécantes. Calculer les coordonnées du point d'intersection G .
5. Montrer que $G \in (CJ)$ et montrer la valeur de la fraction $|CG|/|GJ|$.

Exercice 7. Projection parallèle

Soit $D_1 : ax + by + p = 0$ et $D_2 : cx + dy + q = 0$ sont deux droites sécantes. Soit (X, Y) un point sur le plan qui n'appartient pas à aucune de ses deux droites. Soit $(X', Y') \in D_1$. Ecrire l'équation de la droite D_3 passant par (X, Y) et (X', Y') . Trouver la condition sur (X', Y') pour que D_3 soit parallèle à D_2 .

2 Bases

Exercice 8. Soient $B = (e_1, e_2)$ une base de \mathbb{R}^2 . Soient $f_1 = e_1 - 2e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$.

1. Montrer que $B' = \{f_1, f_2\}$ est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Est-ce que B' définit la même orientation que B ?
3. Calculer les coordonnées d'un vecteur quelconque $V = xe_1 + ye_2$ dans la base B' .
4. Quelle est la matrice de passage de B à la nouvelle base B' ? Et de B' à B ?