

Feuille d'exercices n° 2
ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Ensembles

Exercice 1.

1. On note $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.
2. On note $A = [1, 3]$ et $B =]2, 4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
3. Déterminer $]3, 8[\cap \mathbb{Z}$, $[-3, 2[\cap \mathbb{N}$ et $]0, 1[\cap \mathbb{Z}$.
4. Déterminer le complémentaire dans \mathbb{R} des parties $] - \infty, 0]$ et $[1, 2[$.
5. Déterminer $] - 2, 3] \setminus \mathbb{Z}$, $] - 2, 3] \setminus [0, 4]$ et $] - 2, 3] \setminus [-4, 4]$.

Exercice 2.

1. Écrire l'ensemble des entiers naturels pairs en extension puis en compréhension.
2. Écrire les ensembles suivants en extension.
 - (a) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2 \}$;
 - (b) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n < 1 \}$;
 - (c) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1 \text{ et } n \text{ est divisible par } 2 \}$;
 - (d) $\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m \}$;
 - (e) $\{ n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}, n < m \}$;
 - (f) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divise } 12 \text{ ou } n \text{ divise } 55 \}$;
 - (g) $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ne divise pas } 12 \text{ et } n \leq 7 \}$.

Exercice 3. Décider si les ensembles suivants sont vides.

1. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x \geq 2 \}$;
2. $\left\{ x \in \mathbb{R}_- \mid \frac{x+1}{2x-1} > 4 \right\}$;
3. $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3xy + 4y^2 = -1 \}$;
4. $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 3xy + 4y^2 = 4 \}$;
5. $\{ (x, y) \in [0, 5] \times [0, 3] \mid 2x - 5y - 10 \geq 0 \}$.

Exercice 4. Soit E un ensemble et $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

1. Montrer l'équivalence des propositions :

- (a) $A \subset B$;
- (b) $A \cap B = A$;
- (c) $A \cup B = B$;
- (d) $A \setminus B = \emptyset$.

2. Montrer l'équivalence des propositions :

- (a) $A \cup B = A \cap C$;
- (b) $B \subset A \subset C$.

3. Montrer l'implication

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies B \subset C .$$

Applications

Exercice 5. Décider si les paires de fonctions qui suivent sont égales.

- 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x + 1)(x^2 - 1)$;
- 2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x)$;
- 3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;
- 4. $f : \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{2}|x + 3|\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ et $g :]\frac{1}{3}, 7[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$;
- 5. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\sqrt{x})^2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$.

Exercice 6. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications qui suivent. Lorsqu'elles sont bijectives, donner leur inverse.

- 1. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$;
- 2. $[\pi, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin(x)$;
- 3. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$;
- 4. $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$;
- 5. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -\ln x & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
- 6. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$;
- 7. $\{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 7, 9, 11\}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 11 & \text{si } x = 1 \\ 7 & \text{si } x = 2 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$;
- 8. $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, x \mapsto -(x - 1)$;
- 9. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(0)$.

Exercice 7.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0\}$. Montrer que f est surjective mais pas injective.
2. Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $f : \{x_i \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \rightarrow \mathbb{R}$.
Montrer que f n'est pas surjective.

Exercice 8. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrer que f est injective et que g l'est aussi si f est surjective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrer que g est surjective et que f l'est aussi si g est injective.

Exercice 9. Soit E, F et G trois ensembles non vides. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer que f est injective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ tel que $f \circ g = \text{Id}_F$.
3. On considère maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $x \mapsto (\max(x, 0), \max(-x, 0))$.
 - (a) Montrer que f est injective et donner $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.
 - (b) Quelle est l'image de f ?

Exercice 10. Soit E un ensemble non vide et $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Étudier la surjectivité de f en considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Exercice 11. Soit f l'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans lui-même définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1, 2\}$, $A = \{3\}$.

Exercice 12. Décrire les ensembles qui suivent.

1. $\tan(\{0\})$;
2. $\sin^{-1}(\{2\})$;
3. $\cos^{-1}([0, 1])$;
4. $(\cos|_{[3,7]})^{-1}([0, 1])$;
5. $(\cos|_{[0,\pi]})^{-1}([0, 1])$;
6. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
7. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : [-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
8. $f^{-1}([0, 1])$ pour $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$;
9. $\sqrt{\cdot}([0, 1])$;
10. $f^{-1}([-1, 1] \cup \{2\})$ et $f([0, 1]^3)$ pour $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto y$;
11. $|\cdot|([-2, -1] \cup [2, 4])$;
12. $(|\cdot|_{[-8,7]})^{-1}([2, 3])$;
13. $|\cdot|^{-1}(\{1\})$.

Exercice 13. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$.

1. Soit $B \subset F$.
 - (a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.
 - (b) À quelle condition a-t-on $f(f^{-1}(B)) = B$?
2. Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.
3. Soit $A \subset E$.
 - (a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
 - (b) Que peut-on dire si $f|_{f^{-1}(f(A))}$ est injective ?
4. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 14. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$.

1. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$. Montrer que

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i) .$$

2. Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout ensemble I et toute famille $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$, on a

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i) .$$

3. Soit I un ensemble et $(B_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(F)^I$. Montrer que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i) .$$