Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 7

SÉRIES DE FOURIER

INDICATIONS

Exercices théoriques

Exercice 1. Déterminer la série de Fourier (réelle, complexe) de la fonction sin.

Solution. Pour $f = \sin$, nous avons $a_n(f) = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, $c_n(f) = \begin{cases} 1/(2\imath), & \text{si } n = 1 \\ -1/(2\imath), & \text{si } n = -1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. □

Exercice 2. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0,\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Solution. Oui. Partir du développement de la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) = |\sin x|$, $\forall\, x \in [-\pi,\pi]$. □

Exercice 3. Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0,\pi[$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$? Et pour tout $x \in]0,\pi[$?

Solution. Pour la première question, regarder en $x = 0$. Pour la seconde, partir du développement d'une fonction 2π-périodique f donnée par $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{si } x \in]0,\pi[\\ -\cos x, & \text{si } x \in]-\pi,0[\end{cases}$. □

Exercice 4. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0,2\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Solution. Soit $a \in]0,\pi[$. Examiner l'egalité pour $x = a$ et $x = 2\pi - a$. □

Études de fonctions numériques

Exercice 5. On considère la fonction f de période 2π, définie sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ par $x \longmapsto \mathrm{ch}(x)$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Solution. 3. $c_n(f) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

4. Calculer $f(x)$ si $x = 0$, respectivement $x = \pi$. □

Exercice 6. Soit $\alpha \in]0,1[$ et f la fonction de période 2π, définie sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ par $x \mapsto \cos(\alpha x)$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. Montrer que $\dfrac{\pi}{\alpha\sin(\alpha\pi)} = \dfrac{1}{\alpha^2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Solution. 3. $c_n(f) = \dfrac{\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi}\dfrac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

4. Examiner $f(0)$. □

Exercice 7. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0; 1/2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [1/2; 1]$.
Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x))$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des coefficients réels.

Solution. C'est toujours possible... une fois que x et ω sont fixés...
Exercice mal formulé. Reformulation : trouver des égalités de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)),\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus A,$$

avec A dénombrable. Indication : une possibilité consiste à prendre $\omega = \pi$. □

Exercice 8. 1. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire, 2π-périodique et définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x$. En déduire les valeurs des séries

$$S_1 := \sum \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad S_2 := \sum \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad S_3 := \sum \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad S_4 := \sum \frac{1}{n^4}.$$

2. Déterminer la série de Fourier de la fonction g impaire, 2π-périodique, définie sur $[0; \pi[$ par $g(x) = x$. Étudier sa convergence. Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

Solution. 1. $c_n(f) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{si } n = 0 \\ -\dfrac{1-(-1)^n}{\pi n^2}, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}.$

Pour calculer S_1, partir de $f(0)$. S_3 se calcule en fonction de S_1. Pour S_2, appliquer l'égalité de Parseval. S_4 se calcule en fonction de S_2.

2. $c_n(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ \imath\dfrac{(-1)^n}{n}, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$. Pour calculer la somme, utiliser l'égalité de Parseval. □

Exercice 9. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$. Étudier la convergence de cette série. Retrouver la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ (voir l'Exercice 5).

Solution. $c_n(f) = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\dfrac{(-1)^n}{1 - \imath n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Pour calculer la somme, utiliser l'égalité de Parseval. □

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π-périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0; \pi[$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

2. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des deux sommes suivantes :
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{et} \quad S := \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Solution. 1. $c_n(f) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{1}{\imath\pi} \dfrac{1-(-1)^n}{n}, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$.

3. Pour la première somme, calculer $f(\pi/2)$. Pour la deuxième somme, utiliser l'égalité de Parseval.
4. Les deux sommes se calculent en fonction de S. □

Sujets d'examen

Exercice 11 (Janvier 2010)**.** Soit la fonction f paire, 2π-périodique définie pour tout $x \in [0,\pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

1. Faire un rapide dessin du graphe de la fonction.
2. f est-elle partout égale à la somme de sa série de Fourier ?
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle puis en déduire sa série de Fourier en formulation complexe.
4. En déduire la valeur des sommes suivantes
$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$
Indication : pour la dernière somme, on pourra utiliser l'égalité de Parseval.
5. En remarquant que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$
trouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution. 3. Se rapporter à l'Exercice 8 et obtenir la réponse (pratiquement) sans calcul.

4. Calculer $f(0)$ pour la première somme ; utiliser l'égalité de Parseval pour la seconde. □

Exercice 12 (Décembre 2007)**.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |\sin(x)|$ si $x \in]-\pi,\pi]$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle .
N.B. : On rappelle que $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.
4. À l'aide de l'égalité de Parseval, évaluer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Solution. 3. $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n = 1 \\ -\dfrac{2}{\pi} \dfrac{1+(-1)^n}{n^2-1}, & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$. □