

Feuille d'exercices n° 7

SÉRIES DE FOURIER

Exercices théoriques

Exercice 1. Déterminer la série de Fourier (réelle, complexe) de la fonction sin.

Exercice 2. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Exercice 3. Existe-t-il une suite réelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, \pi[$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin(nx)$? Et pour tout $x \in]0, \pi[$?

Exercice 4. Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx)$?

Études de fonctions numériques

Exercice 5. On considère la fonction f de période 2π , définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par $x \mapsto \operatorname{ch}(x)$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. En déduire les valeurs de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 6. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et f la fonction de période 2π , définie sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ par $x \mapsto \cos(\alpha x)$.

1. Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
2. Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
3. Déterminer sa série de Fourier en formulation complexe puis en formulation réelle.
4. Montrer que $\frac{\pi}{\alpha \sin(\alpha \pi)} = \frac{1}{\alpha^2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$.

Exercice 7. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire, de période 2, et définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0; 1/2[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [1/2; 1]$.

Lorsque c'est possible, exprimer $f(x)$ comme la somme d'une série de la forme $\sum (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ et les a_n, b_n des coefficients réels.

Exercice 8. 1. Déterminer le développement en série de Fourier de la fonction f paire, 2π -périodique et définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x$. En déduire les valeurs des séries

$$S_1 := \sum \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad S_2 := \sum \frac{1}{(2n+1)^4}, \quad S_3 := \sum \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad S_4 := \sum \frac{1}{n^4}.$$

2. Déterminer la série de Fourier de la fonction g impaire, 2π -périodique, définie sur $[0; \pi[$ par $g(x) = x$. Étudier sa convergence. Retrouver la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 9. Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique définie sur l'intervalle $] - \pi, \pi]$ par $f(x) = e^x$. Étudier la convergence de cette série. Retrouver la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ (voir l'Exercice 5).

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0; \pi[$.

- Calculer les coefficients de Fourier de f .
- Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f .
- En déduire les valeurs des deux sommes suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

- Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Sujets d'examen

Exercice 11 (Janvier 2010). Soit la fonction f paire, 2π -périodique définie pour tout $x \in [0, \pi]$ par $f(x) = \pi - x$.

- Faire un rapide dessin du graphe de la fonction.
- f est-elle partout égale à la somme de sa série de Fourier ?
- Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle puis en déduire sa série de Fourier en formulation complexe.
- En déduire la valeur des sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Indication : pour la dernière somme, on pourra utiliser l'égalité de Parseval.

- En remarquant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

trouver la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 12 (Décembre 2007). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = |\sin(x)|$ si $x \in] - \pi, \pi]$.

- Faire un dessin rapide du graphe de la fonction.
- Montrer que f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.
- Déterminer sa série de Fourier en formulation réelle .

N.B. : On rappelle que $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

- À l'aide de l'égalité de Parseval, évaluer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.