Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 6

Géométrie affine

Premières propriétés

Exercice 1. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine. Utilisez la relation de Chasles pour obtenir : $\forall A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{AA} = 0$ et $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Exercice 2. Milieu. Soient A et B deux points d'un $\mathbb{R}$-espace affine $\mathcal{E}$. Montrer que, pour un point C de $\mathcal{E}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

(ii) $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

Montrer qu'un tel point existe et est unique, on l'appellera milieu de $\{A, B\}$.

Exercice 3. Parallélogramme. Montrer que, pour quatre points A, B, C et D d'un $\mathbb{R}$-espace affine, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

(ii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

(iii) Les milieux de $\{A, C\}$ et $\{D, B\}$ coincident.

Si l'une de ces propriétés est vérifiée et si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont indépendants on dit que $ABCD$ est un parallélogramme. Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas indépendants, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme aplati.

Exercice 4. Soient E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, polynomiales de degré inférieur ou égal à n, E_1 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 1$ et E_0 l'ensemble des fonctions f de E telles que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$.

1. Montrer que E et E_0 sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie.
2. Soient f, g dans E_1. Les éléments $f + g$, $f - g$, $\dfrac{f+g}{2}$ sont-ils dans E_1, dans E_0 ?
3. Montrer que E_1 peut-être muni d'une structure d'espace affine d'espace vectoriel sous-jacent E_0.

Sous-espaces affines

Exercice 5. On considère le plan $\mathbb{R}^2$ vu comme espace affine.

1. Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y + 4 = 0\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^2$. Quel est son espace directeur ? Sa dimension ?
2. Trouver un sous-espace affine différent de $\mathcal{D}$ ayant le même espace directeur.
3. Trouver un vecteur u et un point M dans $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{D} = \{M + tu,\ t \in \mathbb{R}\}$.
4. Montrer que $\mathcal{D}$ est le sous-espace affine engendré par deux points A et B de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

1. Donner un sous-espace vectoriel F de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $M = (a,b,c)$ un point de $\mathbb{R}^3$ vu comme espace affine. Donner une équation cartésienne du sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ passant par M et de direction F.

Exercice 7. Soient a et b deux nombres réels et soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par le système d'équations

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ x - 2y + z = b \end{cases}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ (on en donnera un point et l'espace directeur ; la réponse dépend en partie de a et b) ; quelle est sa dimension ?

Exercice 8. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension 3. Soient (u,v,w) une base de $\overrightarrow{E}$, A un point de E et $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par u.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons M_λ le point $A + w + \lambda v$. Montrer qu'il existe un unique plan passant par M_λ et contenant D. On le notera $\mathcal{P}_\lambda$.
2. Montrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}_\lambda$ décrit tous les plans contenant $\mathcal{D}$ sauf un. On le note $\mathcal{P}_\infty$. Déterminer la direction de $\mathcal{P}_\infty$ en fonction de u, v, w.

Équations cartésiennes, repères cartésiens

Exercice 9. Soit $R = (0, i, j, k)$ un repère cartésien d'un espace affine (de dimension 3). Soient A et B les points de coordonnées respectives $(0, -1, 2)$ et $(1, 1, 1)$ dans ce repère. On note R_1 le repère cartésien (A, i, j, k) et R_2 le repère $(B, -k, -i, j)$. Exprimer les coordonnées d'un point M dans le repère R_2 en fonction de celles dans le repère R_1.

Exercice 10. Soit $\mathcal{F}$ le sous-espace affine de $\mathbb{C}^4$ passant par $(1, 0, i, -1)$ et dont l'espace directeur est engendré par $(1, 1, i, -i)$ et $(0, 1+i, 1, -1)$. Donner un système d'équations cartésiennes de $\mathcal{F}$.

Exercice 11. À quelle condition sur le réel a les quatre points $(1, 1, a)$, $(2, 3, 2a)$, $(3, 1-a, a-1)$ et $(2, 3, 3+a)$ de $\mathbb{R}^3$ sont-ils affinement indépendants ? Pour chaque valeur de a pour lequel ils ne le sont pas, donner la dimension du sous-espace affine qu'ils engendrent, et un système d'équations cartésiennes de ce dernier.

Exercice 12. Soient A et B deux points distincts de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (x_A, y_A), respectivement (x_B, y_B) dans un repère cartésien. Montrer que $P(x, y)$ appartient à la droite $\langle A, B\rangle$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Exercice 13. Soient, dans $\mathbb{R}^3$, $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point, $\overrightarrow{u_1} = (a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient au plan contenant A et engendré par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Exercice 14. Soit $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ formé des quadruplets (x, y, z, t) tels que $x - y + 2z + 3t = 5$. Montrer que c'est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera l'espace directeur. Donner un repère cartésien de $\mathcal{F}$; le compléter en un repère cartésien de $\mathbb{R}^4$.

Espaces affines euclidiens

Exercice 15. Soit $ABCD$ un parallélogramme dans un plan affine euclidien. Montrer la formule : $AC^2 - BD^2 = 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Exercice 16. Préciser, dans un parallélépipède rectangle d'un espace affine euclidien, lesquelles parmi les droites portant les arêtes sont perpendiculaires et lesquelles sont seulement orthogonales.

Exercice 17. On définit la médiatrice d'un segment dans le plan affine euclidien E comme l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

1. Montrer que la médiatrice est la droite perpendiculaire au segment menée du milieu du segment.
2. Montrer que les trois médiatrices d'un triangle non aplati sont concourantes. Leur intersection est appelée le centre du cercle circonscrit.
3. Montrer que dans un triangle ABC non aplati et isocèle en A, la hauteur et la médiane relatives au sommet A sont confondues et sont contenues dans la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 18. Soit ABC un triangle (éventuellement aplati) dans un plan affine euclidien.

1. En notant I le milieu de $[BC]$, calculer AI^2 et prouver l'égalité de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + BC^2/2$.
2. Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

Exercice 19. Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé, on considère le plan affine Π passant par $A = (1, 2, 3)$ et dirigé par $\overrightarrow{\Pi} = \text{Vect}\{(1, 2, 0), (0, 1, 2)\}$.

1. Déterminer l'espace vectoriel $\overrightarrow{\Pi}^{\perp}$
2. Décrire les points de Π en utilisant A et $\overrightarrow{\Pi}^{\perp}$. En déduire une équation cartésienne de Π.
3. Calculer la distance du point $M = (1, 0, 1)$ au plan Π.

Exercice 20. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$ et le point M de coordonnées (x_M, y_M). Montrer que la distance de M à $\mathcal{D}$ est donnée par la formule

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 21. Dans un plan euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé (O, i, j), on considère les droites d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ et $2x + y - 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les trois projections orthogonales sur ces droites sont alignées.

Exercice 22. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite $\mathcal{D}_\lambda$ d'équation

$$(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2.$$

Montrer que les droites $\mathcal{D}_\lambda$ sont toutes tangentes à un cercle dont on donnera le centre et le rayon. Indication : avec quelques valeurs particulières de λ, on trouvera le cercle puis on déterminera la distance entre le centre du cercle et $\mathcal{D}_\lambda$.