
Feuille d'exercices n° 5

ANGLES ET ESPACES EUCLIDIENS ORIENTÉS

Exercice 1. (Rappel cours). Soit P un plan euclidien orienté. Donner des bijections entre les objets suivants : ensemble des angles orientés, $SO(P)$, ensemble des vecteurs unitaires de P, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Sont-elles des isomorphismes de groupes ?

Solution. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés et $\mathcal{U}$ les vecteurs unitaires de P. On a
1. rot : $\mathcal{A} \longrightarrow SO(P)$ définie par $\text{rot}((\widehat{u,v})) = \phi$ où ϕ est l'unique rotation telle que $\phi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ (existence et construction demontrée en cours). C'est une bijection et sa réciproque est rot : $SO(P) \longrightarrow \mathcal{A}$ définie par $\text{rot}(\phi) := (\widehat{u,\phi(u)})$. Ce sont des isomorphismes de groupe (démonstration faite en cours).
2. $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow SO(P)$ définie par $\widehat{\theta} \mapsto \phi$ où ϕ est la rotation qui a pour matrice dans une bond quelconque la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On a noté $\widehat{\theta}$ la classe de $\widehat{\theta}$ modulo 2π. C'est un isomorphisme de groupe (démontré en cours).
On en déduit une bijection entre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathcal{A}$ en composant celle-ci avec rot.
3. On fixe un élément $i \in \mathcal{U}$. On a une bijection $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{U}$ définie par $(\widehat{u,v}) \mapsto w$ où w est l'unique élément de $\mathcal{U}$ tel que $(\widehat{u,v}) = (\widehat{i,w})$ (démontré en cours).
On en déduit une bijection entre $\mathcal{U}$ et $SO(P)$ ainsi qu'avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ en composant avec les autres bijections. D'autre part $\mathcal{U}$ n'est pas un groupe.
4. Finalement on a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{U}$ grâce à l'exponentielle complexe $\widehat{\theta} \mapsto e^{i\theta}$. Pour la réciproque il s'agit d'associer à un nombre complexe la classe de son argument principal. C'est bien un isomorphisme de groupe (l'operation qui fait de $\mathbb{U}$ un groupe est la multiplication de nombres complexes). $\square$

Exercice 2. Angle plat, angle droit. On considère E un plan euclidien orienté.

1. Soit u un vecteur non nul de E. Montrer que les angles orientés $(\widehat{u,u})$ et $(\widehat{u,-u})$ ne dépendent pas de u. On appelle $(\widehat{u,-u})$ l'angle plat.
2. On cherche les angles α non nuls dont le double est l'angle nul $(\widehat{u,u})$. Soit α avec cette propriété et $\varphi = \text{rot}(\alpha)$. Montrer que $\varphi^2 = \text{id}$ et donner la matrice de φ dans une base orthonormée.
3. En déduire que α est l'angle plat. Quelle est sa mesure principale ?
4. On s'interesse maintenant aux angles d'ordre 4, c'est à dire 4β est l'angle nul et $k\beta$ non nul pour $k = 0, 1, 2, 3$. Soit β un tel angle et $\phi = \text{rot}(\beta)$. Montrer que $\phi^2 = -\text{id}$.
5. Donner les matrices possibles pour ϕ dans une base orthonormée de E. Quelles sont les mesures principales pour les angles trouvés ?

Solution. 1. On peut utiliser par exemple la bijection rot. Soient $u, v \in E$ puisque $\mathrm{rot}(\widehat{(u,u)}) = \widehat{(v,v)} = \mathrm{id}$ et en particulier rot est injective alors $\widehat{(u,u)} = \widehat{(v,v)}$. De même $\mathrm{rot}(\widehat{(u,-u)}) = \widehat{(v,-v)} = -\mathrm{id}$ donc $\widehat{(u,-u)} = \widehat{(v,-v)}$.
2. Si $2\alpha = 0$ (on rappelle que ici 0 est l'angle nul égal aussi à $\widehat{(u,u)}$ pour n'importe que $u \in E$) alors $\mathrm{rot}(2\alpha) = \mathrm{rot}(\widehat{(u,u)}) = \mathrm{id}$. D'autre part on rappelle que rot a la propriété suivante : $\mathrm{rot}(\gamma + \beta) = \mathrm{rot}(\gamma) \circ \mathrm{rot}(\beta)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. On déduit dans notre cas $\mathrm{rot}(2\alpha) = \mathrm{rot}(\alpha) \circ \mathrm{rot}(\alpha) = \varphi^2 = \mathrm{id}$. La matrice de φ dans une base orthonormée est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$ On en déduit que : $a = \pm 1, b = 0$, donc la matrice est $\pm\mathrm{id}$.
3. Si α est non nul $\mathrm{rot}(\alpha)$ n'est pas l'identité donc sa matrice est $-\mathrm{id}$ et $\mathrm{ang}(-\mathrm{id})$ est l'angle plat. Sa mesure principale est $-\pi$.
4. On a $4\beta = 0$ donc $2(2\beta) = 0$ et comme de plus $2\beta \neq 0$ alors 2β est l'angle plat. Comme dans la question (2) on en déduit $\phi^2 = -\mathrm{id}$.
5. La matrice de ϕ dans une base orthonormée directe est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$. On en déduit que : $a = 0, b = \pm 1$, ce qui correspond à deux rotations possibles ayant pour matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les mesures principales des angles correspondants sont $\pi/2$ et $-\pi/2$.

□

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 et u et v deux vecteurs non nuls de E.

1. Notons θ la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(u,v)}$. Montrer que $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$ et $\det(u,v) = \|u\|\|v\|\sin(\theta)$ (où le déterminant est pris dans une base orthonormée directe).
2. Soit f un endomorphisme orthogonal de E.
   (a) On suppose que f est direct. Montrer que $\widehat{(f(u), f(v))} = \widehat{(u,v)}$.
   (b) On suppose que f est indirect. Montrer que $\widehat{(f(u), f(v))} = -\widehat{(u,v)}$.
   (c) Application : Soit (ABC) un triangle isocèle en A (*i.e.* tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$).
   Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$.

Solution. 1. Soit $\phi = \mathrm{rot}(\widehat{(u,v)})$, sa matrice dans une bond (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Si $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ alors $\phi(u) = (x_1\cos\theta - x_2\sin\theta)e_1 + (x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)e_2$. On calcule le produit scalaire $\langle u, \phi(u)\rangle = \|u\|^2\cos\theta$. D'autre part $\phi\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \left(\frac{v}{\|v\|}\right)$ donc on peut écrire $v = \|v\|\phi\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$. On en déduit

$$\langle u, v\rangle = \frac{\|v\|}{\|u\|}\langle u, \phi(u)\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta.$$

On calcule maintenant

$$\det(u,v) = \frac{\|v\|}{\|u\|}\det(u, \phi(u)) = \frac{\|v\|}{\|u\|}\begin{vmatrix} x_1 & x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_2 & x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\|v\|}{\|u\|}\|u\|^2\sin\theta.$$

2.a. On peut supposer u et v unitaires. Soit $\phi = \mathrm{rot}(\widehat{(u,v)})$ donc $\phi(u) = v$. D'autre part $\phi(f(u)) = f(\phi(u))$ (car $SO(E)$ est commutatif) et donc $\phi(f(u)) = f(v)$. Ceci implique $\phi = \mathrm{rot}(\widehat{(f(u), f(v))})$ et donc $\widehat{(f(u), f(v))} = \widehat{(u,v)}$.
2.b. On suppose encore u et v unitaires. On rappelle que dans une bond $\mathcal{B}$ la matrice d'une isométrie indirecte (donc une réflexion) est de la forme $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ \sin\psi & -\cos\psi \end{pmatrix}$. Soit θ la mesure principale de $\widehat{(u,v)}$ et $\phi =$

$\mathrm{rot}(\widehat{(u,v)})$, on a donc $\phi(u)=v$. La matrice de ϕ dans $\mathcal{B}$ est $Mat_{\mathcal{B}}(\phi)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On vérifie par le calcul (multiplier les deux matrices) que

$$Mat_{\mathcal{B}}(f)Mat_{\mathcal{B}}(\phi)=Mat_{\mathcal{B}}(\phi')Mat_{\mathcal{B}}(f)$$

où ϕ' est la rotation de mesure principale $-\theta$. Ainsi

$$f(v)=f(\phi(u))=\phi'(f(u)) \text{ et donc } \phi'=\mathrm{rot}(\widehat{(f(u),f(v))}).$$

Par les bijections vues dans l'exercice 1 (et dans le cours) si la mesure de ϕ' est l'opposé de la mesure de ϕ alors l'angle $\widehat{(f(u),f(v))}=-\widehat{(u,v)}$.
3. On considère un repère centré en A et la réflexion f par rapport à la médiatrice de $[BC]$. On en déduit $f(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}$ et $f(\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{BC}$. On a donc d'après le (2.)

$$\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})}=\widehat{(f(\overrightarrow{CB}),f(\overrightarrow{CA}))}=-\widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})}=\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})}.$$

□

Exercice 4. Produit vectoriel : propriétés de base. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $x,y,z\in E$ on note $\det_{\mathcal{B}}(x,y,z)$ le determinant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées respectives de x,y et z dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soient $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(x,y,z)=\det_{\mathcal{B}'}(x,y,z)$. On note $[x,y,z]:=\det_{\mathcal{B}}(x,y,z)$ et on l'appelle le produit mixte de x,y et z.
2. Soient $x,y\in E$. En considérant l'application $\varphi: E\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(z)=[x,y,z]$ montrer qu'il existe un unique $w\in E$ tel que $\forall z\in E, \varphi(z)=<w,z>$. On dit alors que w est le produit vectoriel de x et y et on note $w=x\wedge y$.
3. Montrer que l'application $(u,v)\mapsto u\wedge v$ est bilinéaire antisymmétrique.
4. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $u\wedge v=0$ si et seulement si u et v colinéaires.
   (b) Si u et v non colinéaires $(u,v,u\wedge v)$ est une base de E.
   (c) $\forall u,v\in E, <u,u\wedge v>=<v,u\wedge v>=0$.

Solution. 1. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ c'est donc une matrice orthogonale de determinant 1. On a $\det_{\mathcal{B}}(x,y,z)=\det P\,\det_{\mathcal{B}'}(x,y,z)=\det_{\mathcal{B}'}(x,y,z)$.
2. L'application φ est linéaire et par le théorème de représentation d'une forme linéaire à l'aide du produit scalaire (chapitre 3 du cours) il existe un unique $w\in E$ tel que $\forall z\in E, \varphi(z)=<w,z>$.
3. $\forall z\in E$ $<u\wedge v,z>=[u,v,z]=-[v,u,z]=-<v\wedge u,z>=<-(v\wedge u),z>$. Donc $u\wedge v=-(v\wedge u)$ (car l'égalité $<u\wedge v,z>=<-(v\wedge u),z>$ est vraie pour tout z!) donc est antisymétrique. Il suffit maintenant de montrer qu'elle est linéaire à gauche. Soient $u_1,u_2,v\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $\forall z\in E$ $<(u_1+\lambda u_2)\wedge v,z>=[u_1+\lambda u_2,v,z]=[u_1,v,z]+\lambda[u_2,v,z]=<(u_1\wedge v,z>+\lambda<(u_2\wedge v,z>=<(u_1\wedge v+\lambda(u_2\wedge v),z>$ et donc $(u_1+\lambda u_2)\wedge v=u_1\wedge v+\lambda(u_2\wedge v)$. On a aussi de faccon évidente $0\wedge v=0$.
4.a. Si u et v sont colinéaires, $\forall z\in E, <u\wedge v,z>=[u,v,z]=0$ donc $u\wedge v=0$. Réciproquement supposons que $\{u,v\}$ libre. On complète en une base $\{u,v,w\}$ et donc $[u,v,w]\neq 0$ donc $<u\wedge v,w>\neq 0$ et donc $u\wedge v\neq 0$.
4.b. Supposons u et v non colinéaires. Il suffit de voir que $[u,v,u\wedge v]\neq 0$. On a $[u,v,u\wedge v]=<u\wedge v,u\wedge v>=\|u\wedge v\|^2\neq 0$ (d'après 3).
4.c. $<u,u\wedge v>=[u,v,u]=0$ et $<v,u\wedge v>=[u,v,v]=0$.

□

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^3$ orienté par la base canonique usuelle.

1. On considère un parallélogramme engendré par deux vecteurs (non nuls) u et v. Exprimer la valeur absolue de l'aire du parallélogramme en fonction du produit vectoriel de u et v.
2. On considère $(OABC)$ un trièdre rectangle, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Montrer que le carré de l'aire du triangle (ABC) est égal à la somme des carrés des aires des trois autres triangles (OAB), (OBC) et (OCA).

Solution. 1. Pour pouvoir répondre à cette question, il faudrait connaître la définition de l'aire d'un triangle dans l'espace. Si on donne cette définition par une formule analytique (par exemple la formule de l'aire en fonction des vecteurs écrits en coordonnées), l'exercice est très simple. Si on la donne par une formule trigonométrique (impliquant les fonctions sin ou cos), il faut alors savoir précisément ce que sont les fonctions trigonométriques, et savoir calculer le produit vectoriel en faisant intervenir les fonctions trigonométriques.
Nous allons choisir une voie intermédiaire (mais du coup pas 100 % rigoureuse) : invoquer la formule de l'aire d'un triangle, et faire le lien intuitif avec le produit scalaire.
Rappelons (?) la formule de l'aire du triangle ABC, qu'il soit dans le plan ou dans l'espace : $\frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{AC}\sin\theta$, avec θ l'angle en A. Appliquée au triangle déterminé par les vecteurs u et v de $\mathbb{R}^3$, elle devient $\frac{1}{2}\|u\|\|v\|\sin\theta$, avec $\|\ \|$ la norme euclidienne usuelle et θ l'angle entre u et v. Il s'ensuit que l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme déterminé par u et v est $\|u\|\|v\|\sin\theta$.
Par ailleurs, le produit scalaire usuel de u et v vérifie $\langle u,v\rangle = \|u\|\|v\|\cos\theta$. Nous obtenons la relation

$$\underline{\mathcal{A}^2} = \|u\|^2\|v\|^2\sin^2\theta = \|u\|^2\|v\|^2(1-\cos^2\theta) = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u\|^2\|v\|^2\cos^2\theta = \underline{\|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2}. \tag{1}$$

Nous allons maintenant obtenir une identité remarquable :

$$\|u\wedge v\|^2 + \langle u,v\rangle^2 = \|u\|^2\|v\|^2. \tag{2}$$

En admettant (2) et en utilisant d'abord (1), puis (2), nous trouvons

$$\mathcal{A}^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u,v\rangle^2 = \|u\wedge v\|^2,$$

d'où (justifier !) $\mathcal{A} = \|u\wedge v\|$. Ou encore :

la longueur du produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ égale l'aire du parallélogramme qu'ils engendrent.

Démonstration de (2). Nous allons voir (exercice 6, item 1) que, si $u = {}^t(u_1,u_2,u_3)$, $v = {}^t(v_1,v_2,v_3)$, alors

$$u\wedge v = {}^t(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \tag{3}$$

Au vu de (3) et de la formule du produit scalaire usuel, (2) revient à

$$\begin{aligned}(u_2v_3-u_3v_2)^2 + (u_3v_1-u_1v_3)^2 + (u_1v_2-u_2v_1)^2 + (u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 = \\ \left[(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2\right]\left[(v_1)^2+(v_2)^2+(v_3)^2\right],\end{aligned} \tag{4}$$

qui se vérifie par calcul direct, pour peu que l'on se rappelle la formule

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

2. À nouveau, nous ferons appel à des formules de calcul de l'aire d'un triangle connues dans le plan, que nous supposerons encore valables dans l'espace. Les triangles OAB, OBC et OCA étant rectangles en O, la somme des carrés de leurs aires vaut

$$\Sigma := \frac{1}{4}\left[\overline{OA}^2\,\overline{OB}^2 + \overline{OB}^2\,\overline{OC}^2 + \overline{OC}^2\,\overline{OA}^2\right]. \tag{5}$$

D'après la question précédente (plus précisément, (1)), si $\mathcal{S}$ est l'aire du triangle ABC et $\mathcal{A}$ est l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, alors

$$\mathcal{S}^2 = \frac{1}{4}\mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2\,\overline{AC}^2 - \frac{1}{4}\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle^2. \tag{6}$$

De (5), (6), nous devons montrer que

$$\overline{OA}^2\,\overline{OB}^2 + \overline{OB}^2\,\overline{OC}^2 + \overline{OC}^2\,\overline{OA}^2 = \overline{AB}^2\,\overline{AC}^2 - \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle^2. \tag{7}$$

Or, d'une part le théorème de Pythagore donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \text{ et } \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2. \tag{8}$$

D'autre part, nous avons (justifier, en utilisant le fait que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont deux à deux orthogonaux)

$$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle = \langle\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\rangle = \langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}\rangle = \overline{OA}^2. \tag{9}$$

Nous obtenons (7) en combinant (8) et (9) (vérifier). □

Exercice 6. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Déterminer l'expression dans la base $\mathcal{B}$ du produit vectoriel de deux vecteurs u et v de E en fonction de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.
2. Soient u, v deux vecteurs normés orthogonaux de E et $w \in E$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de E si et seulement si $w = \pm u \wedge v$. À quelle condition cette base est-elle directe ?
3. Application : Déterminer toutes les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\end{pmatrix}$.
4. Démontrer la formule du double produit vectoriel :

$$\forall (u, v, w) \in E, \quad u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w.$$

5. Soient $a, b, c \in E$ non nuls. On note $a' = b \wedge c$, $b' = c \wedge a$, $c' = a \wedge b$ et $v = \|a\|a' + \|b\|b' + \|c\|c'$. On suppose que $v \neq 0$. Montrer que :

$$\cos\widehat{(v,a)} = \cos\widehat{(v,b)} = \cos\widehat{(v,c)}.$$

Solution. Rappelons que, pour u, v dans E, le produit vectoriel $u \wedge v$ est *le* vecteur α de E qui vérifie

$$\langle \alpha, w\rangle = [u, v, w]. \tag{10}$$

1. Soient $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$, $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$. Si nous écrivons $u \wedge v = \alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_3e_3$, $j = 1, 2, 3$, nous devons calculer α_j en fonction des u_ℓ et v_ℓ, $\ell = 1, 2, 3$. Déterminons par exemple α_1. Nous avons

$$\alpha_1 = \langle u \wedge v, e_1\rangle = [u, v, e_1] = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 1\\ u_2 & v_2 & 0\\ u_2 & v_3 & 0\end{pmatrix} = u_2v_3 - u_3v_2 \tag{11}$$

(en utilisant respectivement : la formule de calcul des coefficients dans une base orthonormée, la définition (10) du produit vectoriel et le fait que le déterminant d'une famille de vecteurs ne dépend pas du choix de la base). De même, nous avons (vérifier) $\alpha_2 = u_3v_1 - u_1v_3$ et $\alpha_3 = u_1v_2 - u_2v_1$.

Il y a une formule mnémotechnique pour se rappeler les coordonnées du produit vectoriel :

$$u \wedge v = \det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & e_1 \\ u_2 & v_2 & e_2 \\ u_3 & v_3 & e_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

2. « $\Longleftarrow$ » Montrons par exemple que $\{u, v, u \wedge v\}$ est une base orthonormée directe.

Posons $w := u \wedge v$. En utilisant le fait que $\{u, v\}$ est (par hypothèse) une famille orthonormée, l'identité fondamentale (2) donne

$$\|w\|^2 = \underbrace{\|u\|^2}_{=1}\ \underbrace{\|v\|^2}_{=1} - \underbrace{\langle u, v\rangle^2}_{=0} = 1. \tag{13}$$

Par ailleurs, nous avons, via (10),

$$\langle w, u\rangle = \langle u \wedge v, u\rangle = [u, v, u] = 0 \tag{14}$$

(car deux colonnes du déterminant sont égales). De même,

$$\langle w, v\rangle = 0. \tag{15}$$

Enfin, nous avons (en utilisant (10) et (13))

$$[u, v, w] = \langle u \wedge v, w\rangle = \langle w, w\rangle = \|w\|^2 = 1. \tag{16}$$

En utilisant (13)–(16) et le fait que la famille $\{u, v\}$ est orthonormée, nous obtenons que $\{u, v, u \wedge v\}$ est une base orthonormée directe.

Par un raisonnement similaire, $\{u, v, -u \wedge v\}$ est une base orthonormée indirecte.

« $\Longrightarrow$ » (Justifier toutes les affirmations qui suivent.) Si $\{u, v, w\}$ est une base orthonormée, alors $\{u, v\}$ est libre et $w \in \{u, v\}^\perp$. Comme $\dim \mathrm{Vect}(\{u, v\}) = 2$, nous obtenons que $\dim\{u, v\}^\perp = \dim \mathrm{Vect}(\{u, v\})^\perp = 1$. Par ailleurs, $\{u, v\}^\perp$ étant de dimension 1, il contient exactement deux vecteurs de longueur 1. Or, w doit être l'un d'entre eux. Il s'ensuit qu'il existe *au plus* deux vecteurs w tels que $\{u, v, w\}$ soit une base orthonormée. Comme, dans l'étape précédente, nous avons montré que $\{u, v, \pm u \wedge v\}$ est une base orthonormée, il s'ensuit que $\{u, v, w\}$ est une base orthonormée précisément si $w = u \wedge v$ ou $w = -u \wedge v$. Enfin, cette base est directe si et seulement si $w = u \wedge v$.

3. Rappelons (?) qu'une matrice est orthogonale si et seulement si sa transposée est orthogonale. Posons $u := {}^t(3/5, 4/5, 0)$. Nous allons déterminer toutes les matrices orthogonales U ayant u comme première colonne, puis transposer le résultat pour répondre à la question posée. Notons que $\|u\| = 1$ (vérifier) ; dans le cas contraire, u ne pourrait pas être une colonne d'une matrice orthogonale (justifier).

Soit v la deuxième colonne de U, et w sa troisième colonne. Alors $\{u, v, w\}$ est une base orthonormée (pourquoi ?), et donc $\{u, v\}$ est une famille orthonormée. De la question précédente, nous avons $w = \pm u \wedge v$. (Et réciproquement : si $\{u, v\}$ est une famille orthonormée et $w = \pm u \wedge v$, alors U convient.) Il reste donc à déterminer tous les v tels que $\{u, v\}$ soit orthonormée, et de calculer les w correspondants. Écrivons $v = {}^t(v_1, v_2, v_3)$. Nous avons

$$\{u, v\} \text{ orthonormée} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3v_1 + 4v_2 = 0 \\ (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2 = 1 \end{cases} \tag{17}$$

En prenant $t := v_1$ comme inconnue principale dans (17), nous obtenons

$$\{u,v\} \text{ orthonormée} \iff \begin{cases} v_1 = t \\ v_2 = -\dfrac{3}{4}v_1 \\ \dfrac{25}{16}t^2 + (v_3)^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = t \\ v_2 = -\dfrac{3}{4}v_1 \\ (v_3)^2 = \underbrace{1 - \dfrac{25}{16}t^2}_{\text{doit être } \geq 0} \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = t, \text{ avec } \dfrac{25}{16}t^2 \leq 1 \\ v_2 = -\dfrac{3}{4}v_1 \\ (v_3)^2 = 1 - \dfrac{25}{16}t^2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} v_1 = t, \text{ avec } |t| \leq \dfrac{4}{5} \\ v_2 = -\dfrac{3}{4}v_1 \\ v_3 = \pm\sqrt{1 - \dfrac{25}{16}t^2} \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = t, \text{ avec } t \in [-4/5, 4/5] \\ v_2 = -\dfrac{3}{4}v_1 \\ v_3 = \pm\sqrt{1 - \dfrac{25}{16}t^2} \end{cases}. \tag{18}$$

À partir de (18), nous obtenons quatre matrices possibles (une pour chaque choix de signe dans la définition de v_2 ou w). Écrivons par exemple les matrices qui correspondent à « + » et « + ». Dans ce cas, en utilisant (3) et (18), nous obtenons (vérifier)

$$w = {}^t\left(\frac{4}{5}\sqrt{1 - \frac{25}{16}t^2}, -\frac{3}{5}\sqrt{1 - \frac{25}{16}t^2}, -\frac{5}{4}t\right),$$

et donc les matrices correspondant à l'énoncé sont

$$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} & 0 \\ t & -\dfrac{3}{4}t & \sqrt{1 - \dfrac{25}{16}t^2} \\ \dfrac{4}{5}\sqrt{1 - \dfrac{25}{16}t^2} & -\dfrac{3}{5}\sqrt{1 - \dfrac{25}{16}t^2} & -\dfrac{5}{4}t \end{pmatrix}, \ t \in [-4/5, 4/5].$$

Calculs similaires dans les trois cas restants.

4. Voici une solution peu élégante, mais qui a l'avantage de ne pas demander de la réflexion. Identifions les vecteurs à leurs coordonnées dans une base orthonormée directe, fixée. Notons $u = {}^t(u_1, u_2, u_3)$, et de même pour v et w. D'une part, nous avons

$$\langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w = (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)\,{}^t(v_1, v_2, v_3) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\,{}^t(w_1, w_2, w_3) \quad . \tag{19}$$

D'autre part, en utilisant deux fois (3), nous obtenons d'abord

$$u \wedge (v \wedge w) = u \wedge {}^t(v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_2),$$

puis (vérifier)

$$\begin{aligned} u \wedge (v \wedge w) = {}^t(&u_2(v_1w_2 - v_2w_1)) - u_3(v_3w_1 - v_1w_3), u_3(v_2w_3 - v_3w_2) - u_1(v_1w_2 - v_2w_2), \\ &u_1(v_3w_1 - v_1w_3) - u_2(v_2w_3 - v_3w_2)). \end{aligned} \tag{20}$$

En comparant (19) et (20), nous obtenons l'égalité demandée, $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$ (vérifier).

5. Montrons par exemple la première égalité. En utilisant le lien entre produit scalaire et cos, nous avons à montrer l' égalité $\dfrac{\langle v, a\rangle}{\|v\|\,\|a\|} = \dfrac{\langle v, b\rangle}{\|v\|\,\|b\|}$ (pourquoi ?), ou encore (comme $v \neq 0$)

$$\langle v, a\rangle \|b\| = \langle v, b\rangle \|a\|. \tag{21}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \langle v, a\rangle \|b\| &= \langle \|a\|\, b \wedge c + \|b\|\, c \wedge a + \|c\|\, a \wedge b, a\rangle \|b\| \\ &= \|a\|\,\|b\| \langle b \wedge c, a\rangle + \|b\|^2 \langle c \wedge a, a\rangle + \|b\|\,\|c\| \langle a \wedge b, a\rangle \\ &= \|a\|\,\|b\|\,[b, c, a] + \|b\|^2 \underbrace{[c, a, a]}_{=0} + \|b\|\,\|c\| \underbrace{[a, b, a]}_{=0} \\ &= \|a\|\,\|b\|\,[b, c, a]. \end{aligned} \tag{22}$$

(Se rappeler, pour chaque étape du calcul, quelles propriétés nous utilisons).

Par un calcul similaire,

$$\langle v,b\rangle \|a\| = \|a\|\|b\|[c,a,b]. \tag{23}$$

De (22) et (23), l'égalité (21) revient à $[b,c,a]=[c,a,b]$, qui se justifie comme suit :

$$[b,c,a] = -[c,b,a] = [c,a,b]. \qquad \square$$

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.

1. Soient w un vecteur unitaire de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la rotation r d'angle θ autour de l'axe D dirigé et orienté par le vecteur w.
   (a) Soit $x \in E$ un vecteur orthogonal à w. Montrer que $r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)w \wedge x$.
   (b) On suppose désormais que x est un vecteur unitaire orthogonal à w. Montrer que
   $$\cos(\theta) = \langle x, r(x)\rangle \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [x, r(x), w] = [w, x, r(x)]$$
   où $[a,b,c]$ désigne le produit mixte des vecteurs $a,b,c \in E$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $w = (1,1,0)$.
3. Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est
   $$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Préciser ses éléments caractéristiques.

Solution. 1. (a). Rappelons la définition de cette rotation, r : sa matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = \{w, e_2, e_3\}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(Rappelons que r ne dépend pas du choix de e_2 et e_3.)

La conclusion de la question 1 est claire si $x = 0_E$ (pourquoi?). Supposons $x \neq 0_E$ et posons $t := \|x\|$ et $e_2 := \frac{1}{t}x$, qui est un vecteur unitaire et (pourquoi?) orthogonal à w. Soit $e_3 := w \wedge e_2$. Rappelons (exercice 6, item 2) que $\{w, e_2, e_3\}$ est une base orthonormée directe de E. Comme $x = 0\cdot w + t\cdot e_2 + 0\cdot e_3$, les coordonnées de $r(x)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont (justifier et vérifier)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t\cos\theta \\ t\sin\theta \end{pmatrix},$$

d'où

$$r(x) = 0\cdot w + t\cos\theta e_2 + t\sin\theta\, w\wedge e_2 = \cos\theta\,(t\,e_2) + \sin\theta\, w \wedge (t\,e_2) = \cos\theta\, x + \sin\theta\, w\wedge x.$$

1. (b). Nous avons (justifier chaque calcul)

$$\langle x, r(x)\rangle = \langle x, \cos\theta\, x + \sin\theta\, w\wedge x\rangle = \cos\theta\,\underbrace{\langle x,x\rangle}_{=1} + \sin\theta\langle x, w\wedge x\rangle = \cos\theta + \sin\theta\,\underbrace{[x,w,x]}_{=0} = \cos\theta,$$

respectivement (en utilisant (10) et le fait que $\{w, x, w \wedge x\}$ est une base orthonormée, *cf* exercice 6, item 2)

$$\begin{aligned}[x, r(x), w] &= [x, \cos\theta\, x + \sin\theta\, w \wedge x, w] = \cos\theta \underbrace{[x, x, w]}_{=0} + \sin\theta\,[x, w \wedge x, w] \\ &= -\sin\theta\,[w, w \wedge x, x] = \sin\theta\,[w, x, w \wedge x] = \sin\theta\,\langle w \wedge x, w \wedge x\rangle \\ &= \sin\theta\,\|w \wedge x\|^2 = \sin\theta\end{aligned}$$

et, enfin,

$$[w, x, r(x)] = -[w, r(x), x] = [x, r(x), w(x)] = (\text{de ce qui précède}) = \sin\theta.$$

2. La rotation est la même que celle d'angle θ déterminée par

$$e_1 := \frac{1}{\|w\|} w = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0).$$

Pour trouver la matrice, nous complétons $\{e_1\}$ à une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$. Clairement, $e_2 := (0, 0, 1)$ est normé et orthogonal à e_1. Nous avons donc (pourquoi ?) $e_3 = e_1 \wedge e_2$, d'où (en utilisant (3)), $e_3 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.
Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice orthogonale (pourquoi orthogonale ?)

$$P := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la matrice de r dans la base $\mathcal{B}'$ est (pourquoi ?)

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Nous avons la relation

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r)\,P,$$

d'où (justifier et vérifier)

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) &= P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r)\,P^{-1} = P\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(r)\,{}^tP \\ &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+\cos\theta)/2 & (1-\cos\theta)/2 & \sin\theta/\sqrt{2} \\ (1-\cos\theta)/2 & (1+\cos\theta)/2 & -\sin\theta/\sqrt{2} \\ -\sin\theta/\sqrt{2} & \sin\theta/\sqrt{2} & \cos\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. En notant les identités remarquables $64 + 17 = 9^2$ et $49 + 32 = 9^2$ il est relativement facile de voir que les colonnes de M forment une base orthonormée. Donc M correspond à un endomorphisme unitaire.
Par ailleurs, la trace de M vaut $16/9$. Rappelons (?) que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme unitaire : soit a uniquement des racines réelles, qui sont chacune 1 ou -1 ; soit a une racine réelle, 1, et deux autres racines complexes conjuguées, $\cos\theta \pm \imath \sin\theta$, avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$; soit, enfin, a une racine réelle, -1, et deux autres racines complexes conjuguées, $\cos\theta \pm \imath \sin\theta$, avec $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. La somme des racines du polynôme caractéristique étant la trace de M, donc $16/9$, le premier cas ne convient pas (sinon la trace serait un entier relatif). Dans le troisième cas, nous aurions (pourquoi ?) $16/9 = -1 + 2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = 25/18$, ce qui est impossible. Il s'ensuit que nous sommes dans le deuxième cas, et donc nous avons à faire à une rotation autour d'un axe. Nous devons donc trouver un vecteur w qui détermine et oriente l'axe de rotation, et l'angle de rotation par rapport à l'orientation déterminée par w.

Rappelons (?) que les coordonnées $\widetilde{w} = {}^t(w_1, w_2, w_3)$ de l'axe w sont solutions de $M\widetilde{w} = \widetilde{w}$. En résolvant ce système, nous trouvons par exemple la solution (de norme 1) $\widetilde{w} = {}^t(-3/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11}, 1/\sqrt{11})$, ce qui donne le vecteur unitaire $w = -(3/\sqrt{11})\,e_1 + (1/\sqrt{11})\,e_2 + (1/\sqrt{11})\,e_3$ déterminant et orientant l'axe de rotation.
De ce qui précède, l'angle de rotation θ vérifie $16/9 = \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = 7/18$. Pour déterminer θ, il faut trouver le signe de $\sin\theta$. Pour ce faire, nous utilisons la question 1. (b), et plus spécifiquement la formule qui donne $\sin\theta$. Pour s'en servir, il nous faut un vecteur unitaire x orthogonal à w. Le vecteur $v := (1/\sqrt{2})\,e_2 - (1/\sqrt{2})\,e_3$ convient (vérifier).
Nous avons (justifier et vérifier) $f(x) = (5/(9\sqrt{2}))\,e_1 + (11/(9\sqrt{2}))\,e_1 + (4/(9\sqrt{2}))\,e_1$, d'où

$$\sin\theta = [x, f(x), w] = \det\begin{pmatrix} 0 & 5/(9\sqrt{2}) & -3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{2} & 11/(9\sqrt{2}) & 1/\sqrt{11} \\ -1/\sqrt{2} & 4/(9\sqrt{2}) & 1/\sqrt{11} \end{pmatrix} = (\text{preuve par intimidation}\ ) = -\frac{5\sqrt{11}}{18}.$$

Nous avons donc $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta < 0$. Finalement, nous obtenons (justifier) $\theta = -\arccos(7/18)$. $\square$

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \iff f \text{ est une rotation ou } f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Supposons que f est une rotation.
   (a) Montrer que pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $[f(x), f(y), f(z)] = [x,y,z]$ (où [ ] désigne le produit mixte).
   (b) Pour $(x,y,z) \in E^3$, simplifier $\langle f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y), z\rangle$.
   (c) Conclure.
2. Supposons désormais que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et vérifie : $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthonormée directe de E.
   (c) Conclure.
3. Deuxième méthode pour le sens direct : supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Simplifier $\langle f(x) \wedge f(y), f(z)\rangle$ pour $(x,y,z) \in E^3$.
   (b) Montrer que pour tout $w \in E$, il existe $x, y \in E$ tels que $w = x \wedge y$.
   (c) En déduire que $f^\star \circ f = \det(f)\,\mathrm{id}$.
   (d) Démontrer qu'alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou f est une rotation.

Solution. 1. (a) Rappelons que, si $f : E \to E$ est une application linéaire (avec E espace vectoriel de dimension finie n, pas nécessairement euclidien), et si $v_1, \ldots, v_n \in E$, alors (quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, nous avons

$$\det{}_{\mathcal{B}}(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det f \times \det{}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n). \tag{24}$$

(Se rappeler comment nous définissons $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$ et $\det f$.) En utilisant (24) et le fait qu'une rotation est de déterminant 1, nous obtenons (a).

1. (b) De la question précédente, nous avons (justifier chaque calcul)

$$\begin{aligned}\langle f(x\wedge y)-f(x)\wedge f(y),z\rangle &= \langle f(x\wedge y),z\rangle-\langle f(x)\wedge f(y),z\rangle\\ &= \langle x\wedge y,f^*(z)\rangle-\langle f(x)\wedge f(y),z)\rangle\\ &= [x,y,f^*(z)]-[f(x),f(y),z]\\ &= [x,y,f^*(z)]-[f(x),f(y),f(f^{-1}(z))]\\ &= [x,y,f^*(z)]-[x,y,f^{-1}(z)]\\ &= [x,y,f^{-1}(z)]-[x,y,f^{-1}(z)]=0.\end{aligned}\tag{25}$$

1. (c). Rappelons (?) que, pour tout $x\in E$, nous avons $x=0_E \iff \langle x,v\rangle=0,\ \forall\, v\in E$. En combinant ce fait avec (25), nous obtenons que $f(x\wedge y)-f(x)\wedge f(y)=0_E$, c'est-à-dire : si f est une rotation, alors $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$, $\forall\, x,y\in E$. Comme, par ailleurs, cette égalité est clairement vraie (?) si $f=0_{\mathcal{L}(E)}$, nous obtenons l'implication « $\Longleftarrow$ » de l'exercice. Dans les questions 2 et 3, nous allons établir « $\Longrightarrow$ » sous l'hypothèse $f\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. (a) Supposons, par l'absurde, que f n'est pas injective. Son noyau n'est donc pas réduit à l'élément nul (pourquoi ?) : il existe $e_1\in E\setminus\{0_E\}$ tel que $f(e_1)=0_E$. Quitte à remplacer e_1 par $\dfrac{1}{\|e_1\|}e_1$, nous pouvons supposer que $\|e_1\|=1$. Nous complétons $\{e_1\}$ à une base orthonormée $\{e_1,e_2,e_3\}$. En utilisant l'exercice 6 item 2, nous avons $e_3=\pm e_1\wedge e_2$. Sans perte de généralité, supposons $e_3=e_1\wedge e_2$. Grâce à (12), nous obtenons $e_2=e_3\wedge e_1$. Notons également que (12) implique également $x\wedge 0=0\wedge x=0_E$, $\forall\, x\in E$.

Pour tout $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3\in E$, nous avons (justifier chaque calcul)

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)&=x_1\underbrace{f(e_1)}_{=0}+x_2f(e_3\wedge e_1)+x_3f(e_1\wedge e_2)\\ &=x_2f(e_3)\wedge\underbrace{f(e_1)}_{=0}+x_3f\underbrace{f(e_1)}_{=0}\wedge f(e_2)=0,\ \forall\, x\in E.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $f=0_{\mathcal{L}(E)}$, ce qui contredit notre hypothèse initiale. Par conséquent, f est bien injective.

2. (b). Posons $u_j:=f(e_j)$, $j=1,2,3$. Nous savons que $e_3=e_1\wedge e_2$ (voir exercice 6, item 2), et comme dans la question précédente, $e_1=e_2\wedge e_3$ et $e_2=e_3\wedge e_1$. Il s'ensuit

$$0_E\neq u_3=f(e_1\wedge e_2)=f(e_1)\wedge f(e_2)=u_1\wedge u_2,\ \text{et, de même, } u_1=u_2\wedge u_3,\ u_2=u_3\wedge u_1.\tag{26}$$

Nous allons montrer que (26) $\Longrightarrow$ $\{u_1,u_2,u_3\}$ base orthonormée directe, d'où la conclusion de cette question.

D'une part, nous avons

$$\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_2\wedge u_3,u_2\rangle=[u_2,u_3,u_2]=0,$$

et, de même,

$$u_j\wedge u_k=0 \text{ si } j\neq k.\tag{27}$$

Par ailleurs,

$$0\neq\|u_1\|^2=\langle u_1,u_1\rangle=\langle u_2\wedge u_3,u_1\rangle=[u_2,u_3,u_1]=-[u_3,u_2,u_1]=[u_1,u_2,u_3].$$

De manière analogue,

$$0\neq\|u_1\|^2=\|u_2\|^2=\|u_3\|^2=[u_1,u_2,u_3].\tag{28}$$

De (27) et (28), $\{u_1,u_2,u_3\}$ est une base orthogonale formée de vecteurs de même longueur. Il reste à montrer que cette longueur vaut 1. Notons $t:=\|u_1\|>0$, et posons $f_j:=\dfrac{1}{t}u_j$, $j=1,2,3$. Alors $\{f_1,f_2,f_3\}$ est une base orthonormée directe (pourquoi ?) et donc $f_3=f_1\wedge f_2$ (voir exercice 6, item 2). Comme, par ailleurs, nous avons (justifier)

$$t\,f_3=u_3=u_1\wedge u_2=(t\,f_1)\wedge(t\,f_2)=t^2(f_1\wedge f_2)=t^2 f_3,$$

nous obtenons que $t = 1$, d'où $u_j = f_j$, $j = 1,2,3$, et donc $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base orthonormée directe.

2. (c). f envoie la base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ sur la base orthonormée $\mathcal{B}' := \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$. Il s'ensuit que f est unitaire (ou orthogonal ; les deux mots expriment la même chose). Par ailleurs, les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont directes ; donc f est de déterminant 1. Nous obtenons donc que f est un endomorphisme unitaire de déterminant 1, donc une rotation.

3. (a) Nous avons (voir (10) et (24))

$$\langle f(x) \wedge f(y), f(z)\rangle = [f(x), f(y), f(z)] = \det f \times [x, y, z],\ \forall\, x, y, z \in E. \tag{29}$$

3. (b). Si $w = 0_E$, alors $x = y = 0_E$ conviennent. Si $w \neq 0_E$, nous écrivons $w = \|w\|\, e_1$, avec e_1 unitaire. En complétant $\{e_1\}$ à une base orthonormée directe $\{e_1, e_2, e_3\}$, nous avons $e_1 = e_2 \wedge e_3$, et alors (justifier)

$$w = \|w\|\, e_1 = \|w\|\, e_2 \wedge e_3 = (\|w\|\, e_2) \wedge e_3.$$

3. (c). Soient $z, w \in E$. Soient $x, y \in E$ tels que $w = x \wedge y$. De (29), nous obtenons (vérifier et justifier)

$$\begin{aligned}\langle (f^* \circ f)(z), w\rangle &= \langle f(z), f^{**}(w)\rangle = \langle f(z), f(w)\rangle = \langle f(z), f(x \wedge y)\rangle = \langle f(z), f(x) \wedge f(y)\rangle \\ &= \langle f(x) \wedge f(y), f(z)\rangle = [f(x), f(y), f(z)] = \det f \times [x, y, z] \\ &= \det f \times \langle w, z\rangle = \det f \times \langle z, w\rangle = \langle (\det f\ \mathrm{id})z, w\rangle,\ \forall\, z, w \in E.\end{aligned} \tag{30}$$

De (30), nous obtenons

$$f^* \circ f = \det f\ \mathrm{Id} \tag{31}$$

(justifier !).

3. (d). En passant aux déterminants, (31) donne (justifier) :

$$\underbrace{\det(\det f\ \mathrm{Id})}_{=(\det f)^3 \text{ (pourquoi ?)}} = \det(f^* \circ f) = \det f^* \times \det f = \det f \times \det f = (\det f)^2,$$

d'où $(\det f)^3 = (\det f)^2$, et donc $\det f \in \{0, 1\}$. Si $\det f = 0$, alors (31) implique $f^* \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Nous obtenons (justifier)

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x)\rangle = \langle (f^* \circ f)(x), x\rangle = \langle 0_E, x\rangle = 0,\ \forall\, x \in E,$$

d'où $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.[1]

Enfin, si $\det f = 1$, alors (31) donne $f^* \circ f = \mathrm{id}$; d'où f est unitaire. Comme $\det f = 1$, il s'ensuit que f est une rotation. □

1. Exercice (plus) avancé. Essayer de prouver l'implication $f^* \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \implies f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ en utilisant la décomposition polaire d'un endomorphisme.