Feuille d'exercices n° 1

PRODUITS SCALAIRES ET INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ

Exercice 1. Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ?

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :
$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application ψ définie sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ par :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \psi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application χ définie sur $(\mathbb{R}^2)^2$ par :
$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, \quad \chi((x,y),(x',y')) = 2xx' + 2ayy' + xy' + x'y.$$
4. On note $E = \mathcal{C}([-1;1];\mathbb{R})$ et on considère l'application définie par
$$\forall f, g \in E, \quad b(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de $a_1, \dots, a_n$. Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X,Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$. Notez que φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mais on identifie ce dernier à $\mathbb{R}$ par un abus de notation.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que φ soit un produit scalaire.
2. Sous cette condition, montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ est une base orthogonale.
3. Toujours sous la même condition, déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base d'un espace euclidien $(E, <,>)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est orthonormale si, et seulement si, pour tout $x \in E$ la coordonnée de x selon b_i est $< x, b_i >$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Exercice 4. Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien. On considère une famille $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ constituée d'éléments de E de norme 1. On suppose que pour tout $x \in E$,
$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, b_i >^2 .$$
Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale puis une base orthonormée de E.

Exercice 5. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel :

$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0;1] \longmapsto \cos(2\pi nt)$.

1. Montrer que la famille d'applications $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.

Exercice 6.

1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\ \|$ la norme associée à ce produit scalaire. Montrer les trois formules de polarisations :
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2).$$
Montrer que $\|\ \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, i.e.
$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on pose
$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$
   (a) Montrer que pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ et $\varphi(x,x) = \|x\|^2$.
   (b) Montrer que pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, 2y) = 2\varphi(x,y)$. Indication : démarrer avec $\|x+2y\|^2 + \|x\|^2$.
   (c) Montrer que pour tous $x, y, z \in E$, $\varphi(x+z, y) = \varphi(x,y) + \varphi(z,y)$.
   (d) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, pour tous $x, y \in E$, $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y)$. Montrer que ceci est encore vrai pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ puis pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (e) En déduire que toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est induite par un produit scalaire.

Exercice 7. Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, k un réel et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 8. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$:

$$\left(\int_a^b |f(t)|dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(t)^2 dt.$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $D = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i \in \mathbb{R}_+^\star\right\}$. On considère l'application $h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que h admet un minimum sur D et décrire des vecteurs pour lesquels ce minimum est atteint.

Exercice 10. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = \mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n. Montrer que pour toute base $\mathcal{B}$ de E, il existe un produit scalaire hermitien sur E tel que $\mathcal{B}$ soit orthonormée.

Exercice 12.

1. Montrer que l'application $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \to \mathbb{C}$ définie par $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{A} \cdot B)$ est un produit scalaire.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Montrer que $\langle A, B\rangle = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \overline{a_{ij}} \cdot b_{ij}$.

Exercice 13. Soit $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien.
2. Montrer que la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X]$ est orthonormée.

Soient $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $Q = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$.

3. Calculer $\|Q\|^2$ en fonction des a_i.
4. Soit $M = \sup\{|Q(z)|\ ;\ z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.
   Montrer que $M \geq 1$ et que : $M = 1 \iff Q = X^n$.